Positional and tabular notations

in Sanskrit mathematical texts (VIIth-Xth century)

SAW seminar January 6, 2011

Using positions –Mathematical practices, accounting practices

Agathe Keller,
CNRS, Université Paris-Diderot

ACCOUNTANCY

HIGHER SECONDARY – FIRST YEAR

Untouchability is a Sin
Untouchability is a Crime
Untouchability is Inhuman.

TAMILNADU
TEXTBOOK CORPORATION
College Road, Chennai - 600 006.

First Edition - 2004

CHAIRPERSON
Dr. (Mrs) R. AMUTHA
Reader in Commerce
Justice Basheer Ahmed Sayeed College for Women
Chennai - 600 018.

REVIEWERS

Dr. K. GOVINDARAJAN
Reader in Commerce
Annamalai University
Annamalai Nagar - 608002.

Dr. M. SHANMUGAM
Reader in Commerce
SIVET College
Gowrivakkam, Chennai-601302.

Mrs. R. AKTHAR BEGUM
S.G. Lecturer in Commerce
Quaide-Millet Govt. College for Women
Anna Salai, Chennai - 600002.

AUTHORS

Thiru G. RADHAKRISHNAN
S.G. Lecturer in Commerce
SIVET College
Gowrivakkam, Chennai - 601302.

Thiru S. S. KUMARAN
Co-ordinator, Planning Unit
(Budget & Accounts)
Education for All Project
College Road, Chennai-600006.

Thiru N. MOORTHY
P.G. Asst. (Special Grade)
Govt. Higher Secondary School
Nayakanpettai - 631601
Kancheepuram District.

Mrs. N. RAMA
P.G. Assistant
Lady Andal Venkatasubba Rao
Matriculation Hr. Sec. School
Chetpet, Chennai - 600031.

Price : Rs.

This book has been prepared by the Directorate of School Education on behalf of the Govt. of Tamilnadu.

This book has been printed on 60 G.S.M. paper

Printed by Offset at :

✤Lall Nigam, B. M. «Bahi-khata: The pre-pacioli indian double entry system of bookkeeping.» *Abacus*, 22(2):148–161, 1986.

✤ Lall Nigam, B. M. «Double-entry system of book-keeping». *Chartered Accountant, New Delhi*, XXXVI(2), 1987.

✤Nobes, C. W. «The pre-pacioli Indian double-entry system of bookkeeping: A comment». *Abacus*, 23(2):182–184, September 1987.

✤ Scorgie, M. E. «Indian imitation or invention of cash-book and algebraic double-entry». *Abacus*, 26(1):63–70, March 1990.

✤Scorgie, Michael E; Nandy; S. C. « Emerging evidence of early Indian accounting». *Abacus*, 28(1):88–97, 1992.

लाभः। शून्यतत्वम्, शून्यकल्पनाभिरकलुषं तत्वम्, परमार्थतस्तस्यापि[1] लोकस्थितत्वात् गणितपर्यालोचनालभ्यत्वाच्च। इति शास्त्राभिधेयोद्देशः।

एकं[2] दश शतमस्मात्सहस्रमयुतं ततः परं लक्षम्[3]।
प्रयुतं कोटिमथार्बुदमब्ज[4] खर्वं निखर्वं च ॥ ७ ॥
तस्मान् महासरोजं शङ्कुं[5] सरितां पतिं ततस्त्वन्त्यम्।
मध्यं परार्द्धमाहुर्यथोत्तरं दशगुणं तज्ज्ञाः ॥ ८ ॥

एकं १, दश १०, शतं १००, सहस्रं १०००, अयुतं १००००, लक्षं १०००००, प्रयुतं १००००००, कोटिः १०००००००, अर्बुदं[6] १००००००००, अब्जं १०००००००००, खर्वं १००००००००००, निखर्वं १०००००००००००, महापद्मं १००००००००००००, शङ्कुः १०००००००००००००, जलधिः १००००००००००००००, अन्त्यं १०००००००००००००००, मध्यं १००००००००००००००००, परार्धम् १०००००००००००००००००।[7]

Extracting a Square Root: Âryabhata's verse

Ab.2.4

Bhāgaṃ hared avargān nityaṃ dviguṇena vargamūlena//

Vargād varge ßuddhe labdhaµ sthānāntare mūlam//

On should divide, constantly the non-square <place> by twice the square-root /
When the square has been subtracted from the square <place>, the quotient is the root in a different place//

Extracting a Square Root: The example of 625

A square place is one that stands for an even power of ten (10^0, 10^2, 10^4, etc.)

uneven	even	uneven
viśama	*sama*	*viśama*
10^2	**10^1**	**10^0**
square	non-square	square
varga	*a-varga*	*varga*
6	**2**	**5**

Extracting a Square Root: The example of 625

10^2	10^1	10^0
6	2	5
− 4		
2	2	5

Square root

2

Extracting a Square Root: The example of 625

$22/4 = 5 + 2/4$

10^2	**10^1**		**10^0**
2	**2**	**5**	
	2	**5**	
-	**2**	**5**	
		0	

Square root
2 5

2	3	5	8
5	8	2	3
4	1	7	6
7	6	4	1

2	3	5	8
5	8	2	3
4	1	7	6
7	6	4	1

2	3	5	8
5	8	2	3
4	1	7	6
7	6	4	1

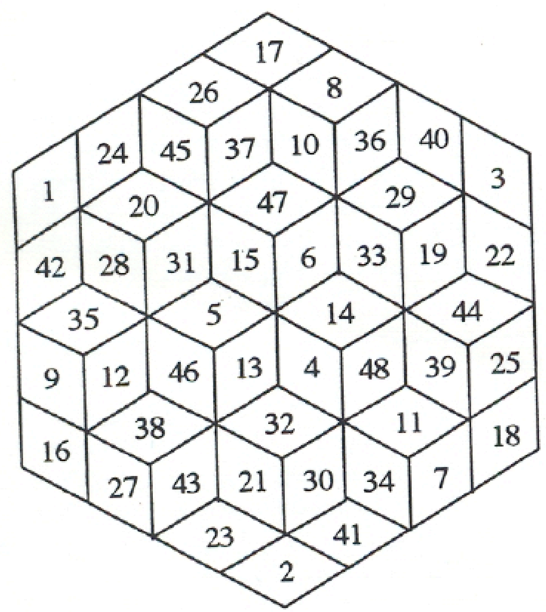
22	21	13	5	46	38	30
31	23	15	14	6	47	39
40	32	24	16	8	7	48
49	41	33	25	17	9	1
2	43	42	34	26	18	10
11	3	44	36	35	27	19
20	12	4	45	37	29	28

$n = 7, p = 175$

Figure 21: Nārāyaṇa's method for odd squares (II): diagonal method.

1	24	37	36	2	23	38	35	3	22	39	34
42	31	6	19	41	32	5	20	40	33	4	21
12	13	48	25	11	14	47	26	10	15	46	27
43	30	7	18	44	29	8	17	45	28	9	16

(a) Preliminary Magic Oblong

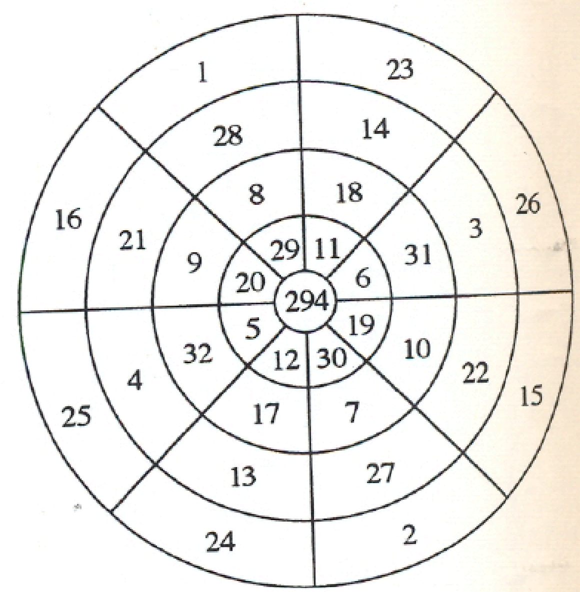


(b) Magic Lotus: $p = 294$

Figure 22: (a) Nārāyaṇa's magic lotus with six petals: preliminary magic oblong. (b) Nārāyaṇa's magic lotus with six petals ($p = 294$).

1	16	25	24	2	15	26	23
28	21	4	13	27	22	3	14
8	9	32	17	7	10	31	18
29	20	5	12	30	19	6	11

(a) Preliminary Magic Oblong



(b) Magic Circle: $p = 360$

Figure 23: (a) Nārāyaṇa's magic circle: preliminary magic oblong. (b) Nārāyaṇa's magic circle ($p = 360$).

1	8	$a-7$	$a-2$
$a-5$	$a-4$	3	6
7	2	$a-1$	$a-8$
$a-3$	$a-6$	5	4

$a = \frac{p}{2}$

Figure 24: Pattern for magic square of four by Laghunandana.

Friday, January 6, 2012

The Karaṇakesarī (fl. 1681)

f. 3r: Elongation of the nodes of the Sun and the Moon for 130 year period

॥अथसूर्यस्यलक्षपंक्तिचक्रं१३०त्यादि॥

Smith MB XIV
Karaṇakesarī

१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६	१७	१८	१९	२०	२१	२२	२३	२४	२५	२६	२७	२८	२९	३०	३१	३२	३३
११	११	११	११	११	११	११	११	११	१०	१०	१०	१०	१०	१०	१०	१०	१०	९	९	९	९	९	९	९	९	९	८	८	८	८	८	८
२६	२३	२०	१७	१३	१०	७	३	०	२७	२४	२०	१७	१४	१०	७	४	१	२७	२४	२१	१८	१४	११	८	४	१	२८	२५	२१	१८	१५	१२
४३	२९	२१	३६	३८	२२	५	५८	३३	१६	०	४४	२७	११	५५	३८	२२	६	४९	३३	१७	०	४४	२८	११	५५	३९	२२	६	५०	३३	१७	१
४०	१९	१	३०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	२०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	४०

३४	३५	३६	३७	३८	३९	४०	४१	४२	४३	४४	४५	४६	४७	४८	४९	५०	५१	५२	५३	५४	५५	५६	५७	५८	५९	६०	६१	६२	६३	६४	६५	६६
८	८	८	७	७	७	७	७	७	७	७	७	६	६	६	६	६	६	६	६	६	६	५	५	५	५	५	५	५	५	५	४	४
८	५	२	२८	२५	२२	१९	२५	१२	९	६	२	२९	२६	२२	१९	१६	१२	९	६	३	०	२६	२३	२०	१६	१३	१०	७	३	०	२७	२४
४४	२८	१२	५५	३९	२३	६	५०	३४	१७	१	४५	२८	१२	५६	३९	२३	७	५०	३४	१८	१	४५	२९	१२	५६	४०	२३	७	५१	३४	१८	२
४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०

६७	६८	६९	७०	७१	७२	७३	७४	७५	७६	७७	७८	७९	८०	८१	८२	८३	८४	८५	८६	८७	८८	८९	९०	९१	९२	९३	९४	९५	९६	९७	९८	९९
४	४	४	४	४	४	४	३	३	३	३	३	३	३	३	३	२	२	२	२	२	२	२	२	२	१	१	१	१	१	१	१	१
२०	७	१४	१०	७	४	१	२७	२४	२१	१८	१४	११	८	४	१	२८	२५	२१	१८	१५	१२	८	५	२	२८	२५	२२	१८	१५	१५	९	६
५५	३८	२३	५६	४०	२४	७	५१	३१	१८	२	४६	२९	१३	५७	४०	२४	८	५१	३५	१९	२	४६	३०	१३	५७	४१	२४	८	५२	३५	१९	३
४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०

१००	१०१	१०२	१०३	१०४	१०५	१०६	१०७	१०८	१०९	११०	१११	११२	११३	११४	११५	११६	११७	११८	११९	१२०	१२१	१२२	१२३	१२४	१२५	१२६	१२७	१२८	१२९	१३०	१३१	१३२
१	०	०	०	०	०	०	०	०	०	०	११	११	११	११	११	११	११	११	११	१	१०	१०	१०	१०	१०	१०	१०	१०	९	९		
२	२९	२६	२२	१९	१६	१३	९	६	३	०	२६	२३	२०	१६	१४	१०	७	३	०	२७	२४	२०	१७	१४	१०	७	४	१	२७	२४		
४६	३०	१४	५७	४१	२५	८	५२	३६	१९	३	४७	३०	१४	५८	४१	२५	९	५२	३६	२०	३	४७	३१	१४	५८	४२	२५	९	५३	३६		
४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०	२८	०	४०	२०	०	४०	२०	०	४०		

bhāgajāti part class

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2} \longrightarrow \frac{b_2 a_1 + a_2 b_1}{b_1 b_2}$$

LV 30 *anyonyahārābhihatau harāṃśau rāśyor samachedavidhānam evaṃ*\\
mithas harābhyām apavartitābhyām yadvā harāṃśau sudhiyā atra guṇyau//\\

The numerator and denominator being multiplied reciprocally by the denominators of the two quantities, they are thus reduced to the same denominators. Or both numerator and denominator may be multiplied by the intelligent calculator into the reciprocal denominators abridged by a common measure.

$$\frac{3}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3} \longrightarrow \frac{53}{15}$$

prabhāgajāti

different part class $\frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2}$

$$\frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} \longrightarrow \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}$$

LV032 *lavāllavaghnāś ca harāḥ haraghnāḥ bhāgaprabhāgeṣu savarṇanam syāt*\\

The numerators multiplied by the numerators, and the denominators by the denominators will be same-coloured when [they are] different parts .

$$\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{1}{1280}$$

(sva)bhāgānubandhaṃjāti   one's own part additive class

kālasaṃvarṇa   samecoloured portion

n

$a_1 \longrightarrow$ $b_1 n + a_1$

b_1 b_1

a_1

$b_1 \longrightarrow$ $a_1(b_2 + a_2)$

a_2 $b_1 b_2$

b_2

LV034 chedaghnarūpeṣu lavāḥ dhanarṇam ekasya bhāgās adhikaunakāś ced//
svāṃśādhikaunas khalu yatra tatra bhāgānubandhe ca lavāpavāhe/
talasthahāreṇa haram nihanyāt svāṃśādhikaunena tu tena bhāgān//

The integer being multiplied by the denominator, the numerator is made positive or negative, provided parts of an unit be added or be subtractive. But, if indeed the quantity be increased or diminished by a part of itself, then, in the addition and subtraction of fractions, multiply the denominator by the denominator standing underneath, and the numerator by the same augmented or lessened by it own numerator.

$n+a_1/b_1$ $a_1/b_1 + (a_1/b_1 \times a_2/b_2)$

svabhāgāpavahojāti   one's own subtractive part class

$$\begin{array}{c} n \\ -a_1 \\ b_1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} b_1 n - a_1 \\ b_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} a_1 \\ b_1 \\ -a_2 \\ b_2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} a_1 (b_2 - a_2) \\ b_1 b_2 \end{array}$$

LV034 chedaghnarūpeṣu lavāḥ dhanarṇam ekasya bhāgās adhikaunakāś ced//
svāṃśādhikaunas khalu yatra tatra bhāgānubandhe ca lavāpavāhe/
talasthahāreṇa haram nihanyāt svāṃśādhikaunena tu tena bhāgān//
The integer being multiplied by the denominator, the numerator is made positive or negative, provided parts of an unit be added or be subtractive. But, if indeed the quantity be increased or diminished by a part of itself, then, in the addition and subtraction of fractions, multiply the denominator by the denominator standing underneath, and the numerator by the same augmented or lessened by it own numerator.

$n+a_1/b_1$ $a_1/b_1 - (a_1/b_1 \times a_2/b_2)$

bhāgāmātajāti   mother part class

Rule of three

A measure M produces a fruit F, if I desire D what is obtained? The fruit of the desire R

$$F/M = R/D \Longleftrightarrow R = (F \times D)/M$$

Setting number's down

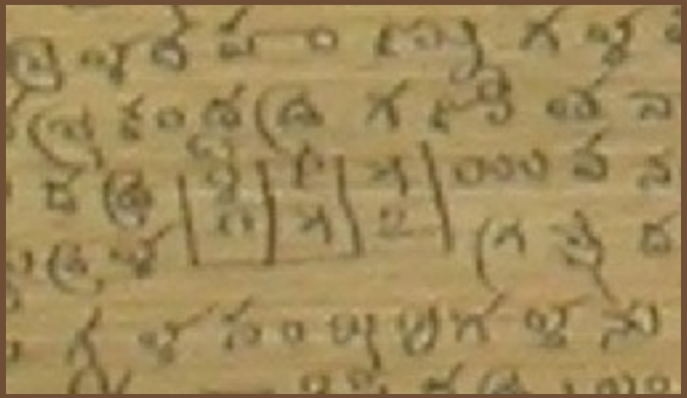
Bhāskara :

To accomplish intelligently a rule of three

The two same quanitities are <disposed> at the beginning and in the end.

The different quantity is <placed> in the middle.

M F D

M D F 

(S.R. Sharma) or

M **M D**

D **F**

F

Setting down a rule of 2n+1 quantities

N measure quantities (M1, M2,…Mn) produce together a fruit quantity F. We know n desire quantities (D1, D2 … Dn) and we are looking for the fruit of the desire (R).

$$R = (F \times D1 \times D2 \times \ldots \times Dn) / (M1 \times M2 \times \ldots \times Mn)$$

Disposition :

M1	D1	.	.
.	.		
.	.		
Mn	Dn		
F			

Li.80. If the interest of a hundred for a month be five, say what is the interest of sixteen for a year? (...)

Statement

1	12
100	16
5	

Li.80. If the interest of a hundred for a month be five, say what is the interest of sixteen for a year? (...)

Statement	1	12	*time in months*
	100	16	*capital*
	5		*interest*

Li.80. If the interest of a hundred for a month be five, say what is the interest of sixteen for a year? (...)

Statement	1 100 5	12 16	*12x16x5=960*

The interest obtained is

9
3
5

Quantities

Rāśi: quantity

Saṅkhyā: value

Aṅka: digit

[Bhinna, Saccheddha

A while computing

B

When stating an amount

a a

b b°

c c

Rṇa; Dhana (rules to sum and subtract)

Li.81. If the interest of a hundred for a month and one third be five and one fifth, say what is the interest of sixty-two and a half for three months and one fifth?

	4	16
Statement	3	5
	100	125
	1	2
	26	
	5	

Li.81. If the interest of a hundred for a month and one third be five and one fifth, say what is the interest of sixty-two and a half for three months and one fifth?

4	16
3	5
100	125
1	2
26	
5	

Li.81. If the interest of a hundred for a month and one third be five and one fifth, say what is the interest of sixty-two and a half for three months and one fifth?

4	*16*
3	*5*
100	*125*
1	*2*

26

5

Li.81. If the interest of a hundred for a month and one third be five and one fifth, say what is the interest of sixty-two and a half for three months and one fifth?

4	*16*
5	*3*
100	*125*
2	*1*
5	*26*

The interest is 7

4

5

BG.E.36. One person has three hundred *rūpas* and six horses. Another has ten horses of like price, but he owes a debt of one hundred rūpas. They are both equally rich. What is the price of a horse?

$300 + 6x = 10x - 100$

$4x = 400$

$x = 100$

yā 6 rū 300

yā 10 rū 100°

yāvattāvat, *avyakta*	unmanifested quantity
ṛṇa	debt, «negative» quantity
dhana	wealth, «positive» quantity

BG.E.42. Subtracting from a capital lent at five in the hundred, the square of the interest, the remainder was lent at ten in the hundred. The time of both loans was alike, and the amount of the interest equal. [Say what were the initial capitals?]

x_i two initial capitals; y final interest; z loan time

$$y = 5x_1z/100 = 10x_2z/100$$

$$x_2 = x_1 - y$$

BG.E.42. Subtracting from a capital lent at five in the hundred, the square of the interest, the remainder was lent at ten in the hundred. The time of both loans was alike, and the amount of the interest equal. [Say what were the initial capitals?]

x_i two initial capitals; y final interest; z loan time

$y = 5x_1z/100 = 10x_2z/100$

$x_2 = x_1 - y^2$

Solution 1 *Assume z=5* *Rule of 5*

1	5	*time*
100	yā 1	*capital*
5		*interest*

«the interest obtained is yā $\frac{1}{4}$ $y=1/4\, x_1$

its square is yāva $\frac{1}{16}$ » $y^2=1/16\, x_1^2$

BG.E.42. Subtracting from a capital lent at five in the hundred, the square of the interest, the remainder was lent at ten in the hundred. The time of both loans was alike, and the amount of the interest equal. [Say what were the initial capitals?]

xi two initial capitals; y final interest; z loan time

$y = 5x_1z/100 = 10x_2z/100$

$x_2 = x_1 - y^2$

x_2 is therefore of the form yāva 1 ° yā 16
16

$[-x_1^2+16x_1]/16$

Rule of 5

1	5	*time*
100	yāva 1 ° yā 16 16	*capital*
10		*interest*

«the interest obtained is yāva 1° yā 16 »
32

$y = [-x_1^2+16x_1]/32$

BG.E.42. Subtracting from a capital lent at five in the hundred, the square of the interest, the remainder was lent at ten in the hundred. The time of both loans was alike, and the amount of the interest equal. [Say what were the initial capitals?]

$[-x_1^2+16x_1]/32=x_1/4$

xi two initial capitals; y final interest; z loan time

$y= 5x_1z/100 = 10x_2z/100$

$x_2=x_1-y^2$

yāva 1° yā 16 "is equal to yā 1 "
32 4

"having reduced by the yāvattāvat both sides, in order to equally subtract the two sides are set down:

yā 1° rū 16
32

$[-x_1+16]/32=0+1/4$

yā 0 rū 1
4

"proceeding as before the measure of the yāvattāvat is 8"

$x_1 = 8$