Le corps à un élément, objet producteur de synthèses

Jean-Jacques Szczeciniarz

Paris-Diderot

April 2016

Content:

Elles sont nombreuses

Il définit un schéma affine sur $\mathbb{F}_1$. La caractéristique de cette description est dans le fait que les opérations de somme d'un anneau peuvent être mises de côté sous différents aspects. La considération philosopique est importante: c'est en mettant de côté la structure additive que nous pouvons concevoir et même développer cet objet $\mathbb{F}_1$, il reste la structure multiplicative. C'est une des intérêts de ce concept à la poursuite duquel nous sommes. Je commente cette mise à l'écart à la fin de l'exposé, l'addition rendant l'extraction de la structure que nous explorons difficile

Monoïde, c'est un magma unifère associatif. une structure très apparemment élémentaire. Pourquoi est-elle la plus adaptée (?) à notre étude. À cause de l'unicité de la loi et son expression la plus générale et similaire à la structure multiplicative

Rappelons les concepts essentiels en particulier celui d'idéal
(1) Soit M un monoïde
Un sous-ensemble I de M est un *idéal* si l'ensemble

$$IM := \{xm : x \in I, m \in M\}$$

est égal à I

(2) Un idéal I est premier si $M \setminus I$ est un sous-monoïde de M
(3) Le *radical* d'un idéal I est l'ensemble de tous les éléments $x \in M$ pour lesquels il existe un entier positif k tel que $x^k \in I$. Il est un idéal de M et est noté $\sqrt{I}$
(4) Le spectre premier de M sur $\mathbb{F}_1$ est l'ensemble topologique de tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de M avec la topologie engendrée par les ensembles fermés $V(I) := \{\mathfrak{p} : I \subset \mathfrak{p}\}$, noté $Spec_{\mathbb{F}_1}(M)$ ou $Spec(M)$ si le contexte est clair

Dans le cas d'un anneau A, un sous-groupe additif I est un idéal de $(A, +, \cdot\ )$ si et seulement si il est un idéal de (A et les deux notions d'idéal premier coïncident, par ailleurs $Spec_{\mathbb{F}_1}(A)$ est strictement plus grand que $Spec(A)$. En effet, l'ensemble vide est toujours un élément du premier ensemble, et jamais un élément du second. En général l'ensemble vide constitue l élément minimal pour l'inclusion de l'ensemble $Spec_{\mathbb{F}_1}(M)$ pour tout monoïde M. Au contraire l'ensemble entier n'est jamais un idéal premier, puisque l'ensemble vide n'a pas d'unité donc n'est pas un sous-monoïde de M.

Tout monoïde a un unique idéal maximal, à savoir le sous -ensemble $M \setminus M^{\times}$. C'est un idéal premier. Il y a un certain nombre de propriétés que je retiens de cet objet $Spec_{\mathbb{F}_1}(M)$
Un des aspects principaux des spectre premiers d'anneaux est le faisceau structural défini par les localisations. Si M est monoïde, et S un sous-monoïde la localisation est bien définie et possède une description explicite.

On définit un espace monoïdal. C'est donc une paire $X, \mathcal{O}_X$, consistant d'un espace topologique X et d'un faisceau de monoïde sur lui $\mathcal{O}_X$. Un morphisme d'espace monoïdal est une paire $(f, f^\sharp)$ où $f : X \to Y$ est une application d'espaces topologiques et $f^\sharp \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ une application de faisceaux sur Y telle que pour tout $x \in X$ le morphisme de fibres induit $f_x^\sharp \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est local. La catégorie des espaces monoïdaux est notée dans la littérature **MS**

On a défini des fermés de Zariski de $Spec_{\mathbb{F}_1}M)$ notés $D(a)$ et le faisceau $\mathcal{O}_{Spec_{\mathbb{F}_1}M}$ est tel que $\mathcal{O}_{Spec_{\mathbb{F}_1}M}(D(a)) = M_a$, résultat classique. Donner un sens à $\mathbb{F}_1$ c'est donc montrer que l'on peut faire de la géométrie algébrique classique sur ce "corps".

Caractéristiques de ce concept. On reconstruit une structure algébrique qui vaut pour les anneaux mais en l'adaptant au monoïde. La topologie sur les spectres de monoïdes possède des structures similaires à celle des spectres premiers d'anneaux. On a une structure canonique d'espace monoidal sur $Spec_{\mathbb{F}_1} M$.

On peut même montrer que cette structure est telle que $Spec_{\mathbb{F}_1}$ définit un adjoint à gauche du foncteur des sections globales Γ vu comme foncteur de $\mathbf{MS}^{\mathbf{op}}$ vers les monoïdes. On continue d'imiter la géométrie algébrique classique et donc on a pour tout espace monoïdal $(X, \mathcal{O}_X)$

$$Hom_{\mathbf{Mon}}(M, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)) = Hom_{\mathbf{MS}}(X, Spec_{\mathbb{F}_1} M)$$

Les espaces monoïdaux qui sont isomorphes à un espace monoïdal de la forme $(Spec_{\mathbb{F}_1} M, \mathcal{O}_{Spec_{\mathbb{F}_1} M})$ sont appelés $\mathbb{F}_1$-schémas géométriques affines

On a encore besoin (d'une famille) d'(es) immersions ouvertes pour définir un recouvrement de Zariski. On dispose ainsi d'un prétopologie de Grothendieck sur un $\mathbb{F}_1$-schéma géométrique affine

Le travail sur $\mathbb{F}_1$ consiste à développer cette notion au départ peu riche afin de pouvoir développer par compensation un ensemble de situations mathématiques d'autant plus riche. Ces situations sont moins contraintes par cet objet d'autant plus flexible. En transgressant des règles que l'on croit figées, c'est à ce niveau que les contraintes sont relachées on produit des mathématiques d'autant plus riches.

L'originalité des travaux de TV est sa généralisation du concept de schéma. La manière dont les nouveaux schémas sont introduits est purement catégorique et $\mathbb{F}_1$ est un cas particulier d'une description plus générale, pour laquelle les protagonistes [V] sont les catégories monoïdales ayant un bon comportement. Et la construction conduit à la notion d'homotopie sur $\mathbb{F}_1$

La stratégie (de rang supérieur du point de vue catégorique) on définit la catégorie des schémas affines, puis on met une topologie sur celle-ci, puis on définit les schémas comme des faisceaux particuliers sur cette catégorie

Je vais donner des définitions essentielles. Une *catégorie monoïdale est une catégorie* $\mathbf{C}$ *munie d'une structure* $(\otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ *où* $\otimes$*:* $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, *est un foncteur,* $\mathbf{1}$ *un objet de* $\mathbf{C}$, *et* (a, l, r) *des isomorphismes naturels de foncteurs avec trois diagrammes commutatifs de cohérence, que je n'explicite pas.*

Une *catégorie symétrique monoïdale est une catégorie monoïdale avec une transformation naturelle* T *des foncteurs* $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ *dans* $\mathbf{C}$ *définie comme* $T_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$ *cohérente avec la structure monoïdale. Une catégorie symétrique monoïdale fermée est une catégorie monoïdale fermée avec un foncteur* $\underline{Hom} : \mathbf{C^{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *et un isomorphisme naturel de foncteurs* ϕ *défini comme* $\phi_{A,B,C} : Hom_{\mathbf{C}}(A \otimes B, C) \to Hom_{\mathbf{C}}(A, \underline{Hom}(B, C))$

Ainsi on peut travailler sur une catégorie monoïdale symétrique fermée ($\mathbf{C}$ $\otimes$) avec toutes les limites et les colimites et un produit tensoriel qui commute avec les colimites. Donnée une catégorie monoïdale on peut définir des monoïdes dans celle-ci et des modules sur un monoïde. On s'est placé à un niveau plus élevé mais on peut y travailler en définissant des strucure algébriques usuelles

Nous allons maintenant ajouter quelques définitions dans la catégorie monoïdale symétrique. On se donne un *monoïde,unitaire, associatif et commutatif* c'est-à-dire un objet R de $\mathbf{C}$ avec une application multiplication et une application unité. On peut alors définir un *R-module sur un monoïde* qui est un objet N avec une application "action" $R \otimes N \rightarrow N$

Monoïdes et modules sur eux constituent respectivement deux catégories a morphisme de monoïdes est une application dans **C** compatible avec les applications unité et multiplication. Comme dans [V] la catégorie des monoïdes est notée $\mathbf{Mon_C}$.Un *morphisme entre R-modules* est une application dans **C** compatble avec l' application action. La catégorie des A-modules est notée A- **Alg** La catégorie ${}^{A/}\mathbf{Mon_C}$ est notée A -**Algèbre**. Ses objets sont appelés *A-algèbres*

On définit le produit tensoriel de M et N sur A, A objet de $\mathbf{Mon_C}$ et M et N objets de A-**Mod**. $M \otimes_A N$. On dispose ensuite d'un foncteur d'oubli . Soit une application $f : A \to B$ alors il existe un foncteur d 'oubli naturel B-**Mod** $\to$ A- **Mod** qui envoie un objet N dans lui-même avec l'action définie comme la composée

$$A \otimes N \to B \otimes N \to N$$

Ce foncteur a des propriétés qui servent à la construction que je ne relève pas ici.

J'ajoute seulement dans $\mathbf{C}, \otimes$ catégorie symétrique monoïdale fermée avec toutes les petites limites et colimites le foncteur d'oubli $\mathbf{Mon}_{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ commute avec les limites et colimites et reflète les isomorphismes

Tous ces éléments qui contribuent à la construction du cadre général servent à définir des structures de A-module et de B-module suffisamment subtiles pour avoir des structures naturelles de B module sur $M \otimes_A N$ et de même en changeant A en B. Nous approchons enfin d'une définition qui est au cœur de l'idée de TV

Commençons par la conception principale. Soit $(\mathbf{C}, \otimes)$ une catégorie symétrique avec les petites limites et colimites. La catégorie opposée de la catégorie des monoïdes dans $\mathbf{C}$ est notée $\mathbf{Aff}_C$ et ses objets sont appelés *schémas affines relatifs à* $\mathbf{C}$. Nous appelons $SpecA$ les objets dans $\mathbf{Aff_C}$, qui correspondent au monoïde A de $\mathbf{C}$

On introduit une topologie sur la catégorie de schémas affines. C'est une topologie généralisant la topologie de Zariski . On introduit un certain nombre de définitions similaires à celles de la topologie de Zariski classique. Je les cite pour fixer le but de la construction: obtenir un recouvrement de Zariski.

Soit $f : A \to B$ une application dans $\mathbf{Mon_C}$.
1) L'application f est plate si le foncteur $\otimes_A B$ des A-modules au B-modules est exact (à gauche) s'il commute avec les limites et les colimites finies.
2) L'application f est de présentation finie si pour tout système direct $\{C_i\}$ de A-algèbres l'application canonique

$$\underset{\rightarrow}{lim}\ Hom_{A-\mathbf{Alg}}(B, C_i) \to Hom_{A-\mathbf{Alg}}(B, \underset{\rightarrow}{lim} C_i)$$

est bijective

3 Une application $SpecB \to SpecA$ est une immersion ouverte si l'application correspondante est un épimorphisme plat de présentation finie
4 Une collection d'applications $\{SpecA_i \to SpecA\}_{i \in I}$ est un recouvrement de Zariski si chaque application est une immersion ouverte et s'il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que toute application de A-modules $M \to N$ est un isomorphisme si et seulement si chaque application induite $M \otimes_A A_j \to N \otimes_A A_j$ est isomorphisme

Remarques. Tout l'objectif de cette construction catégoriale est de définir un recouvrementde Zariski sur cette catégorie relative. Et surtout

Les recouvrements de Zariski définissent une prétopologie de Grothendieck sur $\mathbf{Aff_C}$

La raison tient à la construction qui donne la préservation par changemenst de base

Une fois obtenue la topologie sur les schémas affines on peut dfinir un faisceau sur sur les schémas affines. On suit toujours le modèle des anneaux, dans lequel le foncteur représenté par un schéma affine est aussi un faisceau. cela est vrai pour dans le cadre plus général dans lequel nous sommes.
Ce cadre étant plus compliqué on n'en donne que des caractéristqiues essentielles du foncteur représenté par un schéma affine. [V] use du mot "schéma affine" pour désigner les objets de $\mathbf{Aff}_{\mathbf{C}}$ et les foncteurs représentés par eux.

Soit X un objet de $\mathbf{Aff_C}$ .Alors le foncteur $h_X = Hom(\cdot, X)$ est un faisceau de Zariski.
Il reste encore à définir les recouvrements ouverts de faisceaux pour disposer d'une bonne définition de "être localement affine" et pour un faisceau. On travaille donc sur les applications de faisceaux de Zariski sur $\mathbf{Aff_C}$

On se donne donc une application de faisceaux de Zariski sur $\mathbf{Aff_C}$.
Soit $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ une application de faisceaux de Zariski sur $\mathbf{Aff_C}$
1 On suppose que $\mathcal{G} = h_X$ est affine. Alors f est une immersion ouverte s'il existe une famille d'immersions ouvertes $\{X_i \to X\}_{i \in I}$ telle que $\mathcal{F}$ est isomorphe sur h_X à l'image de l'application induite de faisceaux $\amalg_{i \in I} h_{X_i} \to h_X$
2 L'application f est une immersion ouverte si pour tout schéma affine h_X sur $\mathcal{G}$ le morphisme induit $\mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} h_X \to h_X$ est une immersion ouverte
3 Une collection d'applications $\{X_i \to \mathcal{F}\}_{i \in I}$ est un recouvrement de Zariski si chaque application est une immersion ouverte et les applications induites $\amalg_{i \in I} X_i \to \mathcal{F}$ est un épimorphisme

On raisonne comme dans le cas des dualités élémentaires. Et on a encore que les immersions ouvertes définis ci-dessus sont isomorphes à celles définies plus haut

Un *schème relatif ‘a* **C** ou *un schème à la Toën Vaquié relatif à* **C** est un faisceau de Zariski sur les schémas affines, qui possède un recouvrement fait des immersions ouvertes de schémas affines

Les recouvrements de Zariski définissent une prétopologie de Grothendieck sur les schémas relatifs à $\mathbf{C}$. Le site qu'ils forment est appelé *le site de Zariski*

La dernière partie de cette construction très catégorielle consiste à donner une *réalisation géométrique* de cette définition d'un schéma à la TV. Pour ce faire [V] souligne que nous ne pouvons plus imiter les constructions précédentes car nous sommes dans un cadre plus abstrait catégoriquement parlant.

Passons donc à la réalisation géométrique. [V] part du théorème suivant. Soit $\mathcal{F}$ un schéma relatif à **C**. Le petit site de $\mathcal{F}$ est isomorphe au site des sous-ensembles ouverts d'un espace topologique $|\mathcal{F}|$ l'isomorphisme est fonctoriel.
Remarque. On remarque c'est une affirmation qui signifie que si l'on considère la catégorie $\mathbf{Zar}(\mathcal{F})$ des immersions ouvertes dans un schéma F munie de la topologie induite par l'inclusion dans le site des faisceaux sur les schémas affines avec la topologie canonique. Il faut montrer qu'elle provient d'un espace topologique

Soit $\mathcal{F}$ un schéma relatif à $\mathbf{C}$. On considère le foncteur contravariant de la catégorie des des immersions ouvertes de schémas affines dans $\mathcal{F}$ dans la catégorie $\mathbf{Mon_C}$ qui associe $h_{SpecA} \to \mathcal{F}$ à A. C'est un faisceau donc un faisceau sur $\mathbf{Zar}(\mathcal{F})$. Il définit un faisceau appelé structure de faisceau structural sur $|\mathcal{F}|$ on le note $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ le couple $(|\mathcal{F}|, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ est appelé *réalisation géométrique de* $\mathcal{F}$

Cette construction abstraite est un descriptif des schémas généralisés à la TV.Elle est fondée sur la définition fonctorielle des schémas. Les schémas sur $\mathbb{F}_1$ est un cas particulier de cette théorie générale.
Un $\mathbb{F}_1$-schéma ou un schéma sur $\mathbb{F}_1$ est un schéma relatif à la catégorie $(\mathbf{Set}, \times , \{ast\})$. La catégorie des $\mathbb{F}_1$ -schémas est notée $\mathbf{Sch}_{\mathbb{F}_1}$

Le concept de corps à un élément a été le prétexte pour un développement de deux analyses qui prennent appui sur le concept de monoïde et développent deux conceptions des schémas. Le second correspondant à celui de schéma relatif à une catégorie.

Il faut insister sur le fait assez intuitif que nous devons oublier l'addition D'abord si l'on se fonde sur les analogies entre groupe linéaire général et groupe symétrique des mathématiciens ont donné de possibles définitions de modules, d'espaces affines ou projectif sur $\mathbb{F}_1$

On définit selon Birkhoff et Cohn une géométrie projective d'ordre q. C'est un ensemble fini P (dont les éléments sont appelés *points*, un ensemble L de sous-ensembles de P (dont les éléments sont appelés *sous-espaces* et une fonction dim: $L \to \mathbb{Z}_{\geq -1}$ appelée *dimension* qui satisfait un certain nombre d'axiomes. La dimension de P est appelée la *dimension de la géométrie*

On a pu montrer que si le théorème de Desargues vaut pour une géométrie projective d'ordre q (q puissance d'un nombre premier) alors elle estéquivalente à $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q$ (tout n'est pas réglé). Si on suppose $q = 1$ et donc un analogue de géométrie projective sur $\mathbb{F}_1$.
On montre alors que : toute géométrie projective d'ordre 1 est équivalente à un triple $(P, \mathcal{P}(P)$ dim) où dim(S) $= \sharp S - 1$
Il est donc légitime d'appeler $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_1$, l'ensemble fini $\{0, 1, \cdots, n\}$vu comme l'alg̀bre Booléenne associée à son ensemble de parties

La combinatoire peut être vue comme un epartie de la géométrie projective sur $\mathbb{F}_1$ D'après le théorème : tout espace projectif d'orde q et de dimension n contient $\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q$ sous-espaces de dimension k

Commentaire. C'est une démonstration originale faite par [V].

C'est une équivalence de catégories. La démonstration est compliquée. Il s'agit d'en donner quelques aperçus dans la mesure où ils éclairent la signification de ces deux catégories.

La démonstration mime celle de l'équivalence es deux notions de schémas qu'elle adapte en forgeant quelques outils supplémentaires d'algébre. Le travail porte d'abord sur la catégorie des monoïdes, en particulier sur la définition de la localisation d'un monoïde sur un ensemble fini puis sur les morphismes de monoïde et leurs propriétés (platitude, présentation finie).

La catégorie des $\mathbb{F}_1$-schéma est équivalent à catégorie des $\mathbb{F}_1$-schéma géométriques

On a ainsi une manière d'associer un $\mathbb{F}_1$-schéma un espace topologique

Nous avons deux sites

Il faut montrer que l'équivalence de catégories respecte la topologie des deux sites

Récapitulatif et sens de cette équivalence

La nouvelle notion d'un $\mathbb{F}_1$-schéma combine l'approche plus ancienne de Soulé et d'eux-mêmes, avec la théorie de Deitmar des spectres de monoïdes et le point de vue fonctoriel de Toën Vaquié. Il suffit de remarquer que c'est une nouvelle synthèse d'approches ou de points de vue. Ou bien cette nouvelle synthèse construit de manière plus déterminée l'objet mais il faudrait en préciser les éléments, et voir ce qu'elle retient et intégre des synthèses précédentes ou bien elle s'en éloigne en un certain sens pour se centrer sur les méthodes

Connes et Consani considèrent les monoides avec 0 et remarquent que les espaces localement isomorphes aux spectres de monoides avec 0 appelés *M_0-schémas* son essentiellement les mêmes que les foncteurs de monoides localement représentables avec 0. Il y aussi une notion naturelle de morphisme dans ce cadre.

Un $\mathbb{F}_1$-schéma est un triple $(\tilde{X}, X, e_X)$ où $\tilde{X}$ est M_0 schéma, X un schéma et $e_X : \tilde{X}_Z \to X$ un morphisme tel que $e_{\tilde{X}}(k)$:

$\tilde{X}_Z(k) \xrightarrow{\sim} X(k)$

Un M_0-schéma $\tilde{X}$ définit le $\mathbb{F}_1$-schéma $(\tilde{X}, \tilde{X}_Z, id_{\tilde{X}_Z})$. Alors il est possible de donner des exemples de $\mathbb{F}_1$-schéma de ce genre. La droite affine $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_1}$ est le spectrum du monoïde $\{T^i\}_{i\in\mathbb{N}} \sqcup \{0\}$ et on a en effet, $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_1} \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{A}^1$
Le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_1}$ est le spectrum du monoïde $\{T^i\}_{i\in\mathbb{Z}} \sqcup \{0\}$ dont la base se prolonge à $\mathbb{G}_m$
Ces deux exemples peuvent être étendus pour définir $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_1}$ et $\mathbb{G}^n_{m,\mathbb{F}_1}$

Reprise de quelques notions simples. Il y a plusieurs points de vue développés sur le même objet.

Je remarque que nombre de gestes théoriques imposés par $\mathbb{F}_1$ sont identiques. d'abord de façon élémentaire, les reconstructions conceptuelles que l'on s'efforce de faire pour lui donner sens. Pourquoi a-t-on cherché à lui donner un sens? La réponse n'est pas univoque. L'expression apparaît comme un prolongement conceptuel de notions possédant un sens mathématique avéré et opératoire. Comme racine de moins 1. La structure de monoïde. L'insertion possible dans les structures algébriques et géométriques les plus fécondes : refaire la géométrie algébrique sur $\mathbb{F}_1$

Un aperçu.

lbruyn.pdf