Cahiers Critiques de Philosophie n°3

Philosophie et Mathématiques
(coordination M.-J. Durand-Dichard)

Marie-José Durand-Richard
« Opération, fonction et signification de Boole à Frege »

Qui s'intéresse à l'histoire et à la philosophie de la logique bute un jour ou l'autre sur la question du caractère premier des travaux de George Boole (1815-64) ou de Gottlob Frege (1848-1925) concernant le basculement de la logique vers les mathématiques. Selon les auteurs ou les contextes, c'est en effet l'un plutôt que l'autre qui se trouve convoqué comme précurseur ou comme fondateur de la logique mathématique, Boole parce qu'il a le premier établi un véritable calcul logique, valant aussi bien pour les classes que pour les propositions, Frege parce que les articulations logiques de son *Idéographie* correspondent à celles de l'actuel calcul des prédicats.

La recherche de précurseurs relève cependant d'une approche rétro-historique qui ne permet pas de saisir dans toute sa complexité la naissance de problématiques nouvelles. En cherchant dans le passé les signes annonciateurs de ce que la science est devenue, cette approche introduit subrepticement une orientation téléologique de l'histoire, certes encore très prégnante au 19ème siècle, mais qui s'est vue fortement controversée depuis. Pourtant, si la philosophie d'Antoine Augustin Cournot (1801-1877) a ouvert la voie à une conception bien moins finaliste de l'histoire, à la fois plus buissonnante et plus constructive, l'histoire des sciences minimise la présentation des conceptions disparues. Elle accorde peu de place à l'étude des difficultés rencontrées, et laisse ainsi tacitement subsister l'idée du caractère inéluctable et cumulatif du développement des sciences.

Cette téléologie implicite du « sens de l'Histoire » est d'autant plus présente en histoire des sciences qu'elle s'appuie sur une conception monolithique du discours scientifique, supposé décrire la réalité du monde, et se suffire à lui-même dans cette perspective. L'une et l'autre ont pour effet de négliger les facteurs, tant conceptuels qu'institutionnels, qui ont porté, favorisé ou entravé la constitution d'un domaine de recherche, ces facteurs n'étant pas censés intervenir dans l'ensemble des significations qu'il déploie. Elles passent sous silence les interrogations qui nourrissent l'émergence et la reconnaissance de significations nouvelles.

Le projet de cette étude est de réexaminer la contribution de Boole et de Frege à la constitution d'un discours scientifique envisagé comme langue universelle, susceptible de garantir la transparence de ce discours face au monde qu'il décrit. Alors que les remises en cause de cette universalité supposée de la science font, aujourd'hui comme hier, crier au danger du relativisme, il s'agit de mettre à jour les présupposés qui ont supporté l'élaboration de la logique mathématique, afin de ne pas être dupe de ses limites lorsque ces présupposés n'ont plus cours. De fait, en présentant ce tournant comme un basculement des mathématiques vers la logique, l'histoire classique de la logique fait fi de l'historicité des mathématiques elles-mêmes, car c'est bien plutôt les mathématiques qui se tournent alors vers la logique, ouvrant une « crise des fondements » bien avant le début du 20ème siècle. Cette étude ne vise aucunement à rejeter *a priori* la démarche universaliste, qui participe des conditions de l'échange interculturel. Il s'agit plutôt d'analyser quels moyens se sont trouvés mobilisés pour la faire exister efficacement, puisque c'est en la présupposant que philosophes et mathématiciens se sont attachés à la construire. Dès lors que se trouve admise l'existence d'un réseau de significations possibles pour le discours scientifique, identifier les composantes opératoires et philosophiques de son élaboration, et les localiser dans le temps et dans l'espace, peut offrir une meilleure maîtrise de son usage et de ses limites, y compris pour le temps présent.

Concernant Boole et Frege, il s'agit d'analyser, à la lumière du quart de siècle qui sépare leurs travaux majeurs, *Les lois de la pensée* de Boole[1] en 1854,et l'*Idéographie* de Frege[2] en 1879. comment leur projet de refondation des mathématiques va conférer à la logique une richesse que ni Aristote ni Kant n'avaient soupçonnée.Or, tous deux commencent à travailler, non pas en logiciens, mais en mathématiciens soucieux de préserver le statut de certitude de leur discipline au moment où s'y développent des usages radicalement nouveaux, les acquis du calcul algébrique rencontrant de nouvelles conceptions géométriques. Leurs contextes de travail sont cependant fort différents. Boole écrit en Angleterre au sortir de la Révolution Industrielle. Autour de lui, entre Cambridge et Oxford, scientifiques et philosophes hésitent entre mathématiques et logique pour fonder un discours universel susceptible d'intégrer, au delà de la philosophie naturelle, les acquis des nouveaux savoirs, notamment ceux de l'économie politique. *An Investigation on the Laws of Thought* constitue une remarquable médiation entre ces deux voies[3] : elle prolonge les travaux du réseau des algébristes anglais qui cherchent à expliciter la logique d'une algèbre opératoire, conçue comme le langage du raisonnement symbolique. Vingt cinq ans plus tard en Allemagne, Frege est d'abord marqué par la question de la nature de la connaissance géométrique, alors bouleversée par l'émergence des géométries non euclidiennes et de la géométrie projective, dont il fait le thème de sa leçon inaugurale[4] de 1873, avant de privilégier le langage de l'arithmétique dans sa recherche de nouveaux fondements.

Pour Boole comme pour Frege, les mathématiques en usage entrent donc en conflit avec les systèmes philosophiques dans lesquels elles étaient antérieurement intégrées. Et ce conflit se trouve amplifié par la montée des sciences inductives, qui donnent de plus en plus de poids aux conceptions empiristes. Interlocuteurs respectifs de Boole et de Frege, John Stuart Mill (1806-1874) est déjà un représentant majeur[5] du mouvement utilitariste anglais, tandis qu'Edmund Husserl (1859-1938) prépare les éléments de sa phénoménologie[6] en Allemagne. La question des fondements de la science expérimentale est ouverte depuis Galilée : John Locke (1632-1704), dans son *Essay on Human Understanding,* et Gottfried Leibniz (1646-1716), dans ses *Nouveaux Essais sur l'Entendement Humain,* y ont apporté des réponses différentes, le premier du côté de l'empirisme, le second du côté de la métaphysique, ouvrant la voie à un débat sans cesse

---

[1] Boole, G., *An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the mathematical Theories of Logic and Probabilities,* London, Walton & Maberley ; réimp. 1916, *Collected Logical Papers,* Chicago-London, 2 vols ; 1992, *Les lois de la pensée,* Paris, Vrin, traduction française de Souleymane Bachir Diagne.

[2] Frege, G., 1879, *Begriffsschrift : eine der arithmetischen nachgebildete Formalsprache des reinen Denkens*, Halle, L. Nebert ; réimp. Igacio Angeletti (éd.), 1964, *Begriffsschrift une andere Aufsätze,* Hildesheim, Olms ; 1972, *Conceptual notation and related articles,* Oxford, Clarendon Press, traduction anglaise de Terrell Ward Bynum ; 1999, 1999, *Idéographie,* Paris, Vrin, traduction française de Corinne Besson,.

[3] Durand-Richard, M.-J., 2000, « Logic versus algebra : English debates and Boole's mediation », *Anthology on Boole,* (ed.) James Gasser, Kluwer Academic Publishers, Synthese Library, 139-166.

[4] Belna, J.-P., 2002, « Frege et la géométrie projective », *Revue d'histoire des sciences,* 55/3, 379-410. Frege, G., 1873, « Über eine geometrische Darstellung der imaginaären Gebilde in der Ebene », *Inaugural-Dissertation der Philosophischen Fakultät zu Göttingen zur Erlangung der Doktorwürde,* Iéna, A. Neuenhann. Repris dans (éd.) Angelleli, I., 1967, *Kleine Schriften,* Hildesheim, Olms. Traduction anglaise de Kaal H., dans (éd.) McGuinness, B., 1984, *Collected Papers on mathematics, logic and philosophy,* Oxford, Clarendon Press.

[5] Mill, J. Stuart, 1843, *System of Logic ratiocinative and inductive*.

[6] Husserl, E., 1891, *Philosophie der Arithmetik* ; 1900, *Logische Untersuchungen ;* 1913, *Idées directrices pour une phénoménologie.*

repris entre ces deux courants de pensée. Il prend une importance cruciale au 19ème siècle, où le rôle de l'expérience devient incontournable, non seulement en physique ou dans les sciences de la nature, mais dans ces mathématiques que Descartes envisageait comme innées.

Aussi bien Boole que Frege explicitent un système de logique qui cherche à préserver l'unité de la science en la fondant sur de nouvelles bases : comme on le sait, une « algèbre spéciale » chez Boole, une « langue formulaire imitée de l'arithmétique » chez Frege. Chacun à sa manière, ils cherchent à contenir le rôle de l'expérience, en se référant à l' « opératoire » pour le premier, au « vrai » pour le second. Mais surtout – et on y prête moins attention – chacun construit son propre système en s'appuyant sur un outil en pleine mutation, emprunté aux mathématiques en raison de ses potentialités, sans délimiter avec précision leurs conditions d'utilisation : chez Boole, les opérations de l'esprit fonctionnent comme les opérations de l'algèbre ; et Frege approfondit l'analyse des propositions en s'appuyant sur une spécificité des fonctions. Inventivité oblige, ces notions sont empruntées aux mathématiques sans que leur utilisation soit interrogée plus avant. L'analyse des enjeux attachés à cette audace cherchera à mieux cerner à la fois leur ambition, et les limites de leur entreprise. C'est donc le rôle idéologique de l'outil mathématique qui est étudié ici chez ces deux auteurs, afin de saisir comment leurs projets logico-philosophiques respectifs tentent de faire face à la fois à l'inventivité formelle propre au 19ème siècle, et à la montée des empirismes.

1. LA LOGIQUE SYMBOLIQUE DE BOOLE

Boole est sans doute un autodidacte[7], mais cette situation doit être appréciée dans le contexte du début du 19ème siècle, les Universités anglicanes anglaises ne concernent alors qu'une infime minorité d'étudiants, quand les Académies dissidentes[8] et les Mechanics Institutes[9] constituaient un réseau de formation parallèle, certes moins élitiste, mais bien plus conséquent, où les « philomaths » développaient un intérêt profond pour la philosophie naturelle. Boole se trouve ainsi plongé dans un vaste mouvement de réflexion sur les contenus des savoirs, engagé autour des universités de Cambridge et d'Oxford confrontées aux effets de la Révolution Industrielle. Alors qu'Oxford persiste à fonder sa propédeutique sur la logique scolastique, Cambridge s'interroge sur les fondements des mathématiques. Au début du 19ème siècle, un vaste mouvement de réforme des contenus agite ces deux universités : celui des Noétiques à Oxford, autour duquel s'articule la Nouvelle Analytique[10], celui des la Société Analytique à Cambridge, fondée par un groupe d'étudiants à l'initiative de Charles Babbage (1791-1871), et dont émerge une conception purement symbolique de l'algèbre. Boole se réclame directement de cette Algèbre Symbolique dans *Mathematical Analysis of Logic* en 1847. Et aussi bien le style que les références de son ouvrage majeur de 1854 témoignent à l'envi de son inscription dans ce courant de pensée.

1.1. Caractérisation de l'approche symbolique : méthode et enjeux

[7] Diagne, S. B., 1989, *Boole, l'oiseau de nuit en plein jour*, Belin, Paris. Ch. 1.

[8] Elles sont nombreuses depuis le 18ème siècle, et accueillent les étudiants qui n'ont pas accès aux universités anglicanes de Cambridge et d'Oxford, où l'inscription et la réussite aux examens supposent de prêter serment à l'Eglise Anglicane.

[9] Les Mechanics Institutes sont répartis sur tout le territoire. Si le père de Boole a fait faillite, il reste un de ces philomaths qui invite ses voisins à observer le ciel à la lunette qu'il a installée sur sa fenêtre. Il est le bibliothécaire du Mechanics Institute de Lincoln.

[10] Corsi, P., 1988, *The heritage of Dugald Stewart : Oxford Philosophy and the method of political economy,* Firenze, Leo S. Olschki editore

Dans la première moitié du 19ème siècle, c'est à la fois pour convertir l'université aux méthodes analytiques qui ont permis à Laplace de parfaire le système newtonien[11], et pour dégager l'algèbre des contingences de son élaboration pragmatique[12], que le réseau des algébristes de Cambridge développe cette conception symbolique de l'algèbre. George Peacock (1791-1858) l'expose en 1830 dans *A Treatise of Algebra,* tandis que Babbage la matérialise dans ses plans d'une machine analytique, dans les années 1830-40. Dès 1839, Boole est en contact direct avec un des membres fondateurs de la Société Analytique, Sir Edward F. Bromhead, et donne ses premières publications au *Cambridge Mathematical Journal,* récemment fondé par Duncan F. Gregory (1813-1844), disciple de Peacock. Ses articles s'orientent très vite vers le calcul symbolique, que Gregory a lui-même particulièrement développé comme méthode de résolution des équations différentielles ou aux différences finies, sous le nom de « calcul des opérations ». Celui qui lui vaut la médaille d'or de la Royal Society en 1844, « A General Method in Analysis »[13], s'inscrit directement dans cette perspective, qu'il poursuivra jusqu'en 1859, dans *A Treatise on Differential Equations*, et en 1860, dans *Treatise on the Calculus of Finite Differences,* et jusqu'à la fin de sa vie[14]. C'est dire que cette problématique n'est pas du tout anecdotique dans l'œuvre booléenne, et correspond à une orientation déterminante de sa pensée.

Cette conception purement symbolique de l'algèbre consiste à affirmer le primat d'une logique opératoire sur la signification des symboles. Ce primat va jusqu'à l'affirmation d'une séparation complète, et donc, d'une indépendance totale, entre cette logique présupposée de l'algèbre, dont relèvent les « vérités nécessaires », et l'« interprétation » des symboles, qui ne concerne que les « vérités contingentes ». Il y a lieu de se garder de toute lecture rétro-historique de cette conception. Il ne s'agit pas pour ces auteurs de penser l'algèbre comme étude de structures abstraites spécifiques et librement définies, ce qu'elle deviendra[15] au 20ème siècle. Il s'agit plutôt d'exprimer la « logique des opérations », conçue comme un calcul universel, et traduisant les opérations de l'esprit. L'*Essay on Human Understanding* de John Locke[16] inspire directement cette conception des opérations. La philosophie du langage qui s'y trouve développée nourrit l'affirmation répétée par tous ces auteurs de l' « arbitraire du signe », par laquelle Locke soutient l'impossibilité d'une connaissance absolue : la connaissance concerne la formation des idées acquises par l'expérience, et donc le fonctionnement de l'esprit, plutôt que l'appréhension des « substances » naturelles, considérées comme inaccessibles. Ces algébristes s'y réfèrent constamment pour affirmer à la fois l'universalité des « lois de combinaison » des symboles et la subordination de leurs interprétations possibles[17]. L'empirisme de Locke est donc modéré par la préexistence des « facultés de l'esprit », dont les opérations combinent les idées simples, et les mots qui les expriment.

---

[11] Playfair, J., 1808, « Review of Laplace's *Traité de Mécanique Céleste* », *Edinburgh Review*, 11, pp. 249-84.

[12] Durand-Richard, M.- J., 1996, « L'Ecole Algébrique Anglaise : les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance », in (éds) Goldstein, C., Gray, J., Ritter, J., *L'Europe Mathématique - Mythes, histoires, identité.* Paris, Eds M.S.H, pp. 445-77.

[13] Boole, G., 1844, « A General Method in Analysis », *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 134, pp. 225-282.

[14] Grattan-Guinness, I., 1982, « Psychology in the Foundations of Logic and Mathematics : the Cases of Boole, Cantor and Brouwer », *History and Philosophy of Logic,* 3, pp. 33-53.

[15] Corry, L., 1996, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures,* Basel-Boston-Berlin, Birkäuser Verlag, Science Networks, Historical Studies.

[16] Locke, J., *Essay on Human Understanding*, London, 2d éd., 1694, trad. fr. 1983 : *Essai philosophique sur l'entendement humain,* M. Coste, 1700, Paris, 5ème éd. 1755.

[17] Durand(-Richard), M.J., 1990, « Genèse de l'Algèbre Symbolique en Angleterre : une Influence Possible de John Locke », *Revue d'Histoire des Sciences,* 43, n°2-3, 129-80.

Dans son *Investigation on the Laws of Thought,* sur laquelle s'appuie surtout la présente étude, Boole donne toutes les références qui permettent de l'inscrire totalement dans cette perspective. Du point de vue du contenu logique, il prend comme base de son analyse[18] les *Elements of Logic* de l'archevêque Richard Whately (1787-1863), dont la motivation première à Oxford était de fonder l' « éducation libérale » sur la logique, ce dont témoigne l'abondant glossaire des termes d'économie politique qui clôt ce travail[19]. Certains des exemples[20] de Boole sont d'ailleurs directement empruntés à Nassau W. Senior (1790-1864), premier professeur d'économie politique à Oxford. Du point de vue de la méthode, Boole revendique haut et fort « la rupture entre procédure et interprétation », qui caractérise l'approche symbolique[21], et qui échappe, dit-il, à la plupart des esprits dans la vie ordinaire. Mais surtout, Boole reprend systématiquement la démarche de Gregory, développée dans ses articles de 1839 pour le *Cambridge Mathematical Journal,* et dans la synthèse qu'il en propose en 1840 dans « On the Real Nature of Symbolical Algebra »[22]. Là où Peacock envisageait une seule Algèbre Symbolique, articulée sur les quatre opérations de l'arithmétique, et dégagée des contingences numériques par un principe très général de « permanence des formes »[23], Gregory présente une classification qui regroupe les opérations selon les lois de combinaison qui les caractérisent. C'est à l'intérieur de ces classes d'opérations qu'il se propose d'appliquer un « principe de transfert », ce qui lui permet, comme l'avait prescrit Peacock, de dépasser le recours aux « analogies opératoires », jugées trop vagues pour assurer la validité formelle des résultats de l'algèbre. Partant d'un système d'opérations dont les propriétés sont déjà établies dans un domaine donné, par ce principe de transfert, Gregory s'autorise à utiliser ces propriétés sans démonstration dans un nouveau domaine, pourvu qu'elles s'y écrivent dans un système de symboles obéissant aux mêmes lois :

« *Les lois de combinaison des symboles a, b, &c., [étant] :*

$$a^m.a^n=a^{m+n}$$
$$a\{b(x)\} = b\{a(x)\}$$
$$a(x) + a(y) = a(x+y)$$

[si] f, f_1, &c., sont d'autres symboles quelconques d'opération (f et f_1 étant de la même espèce) soumis aux mêmes lois de combinaison, tels que :

$$f^m.f^n(x)=f^{m+n}(x)$$
$$f(f_1(x))=f_1(f(x))$$
$$f(x) + f(y) = f(x+y)$$

alors, tout ce que nous avons pu prouver de a, b, &c. à partir de ces trois lois, doit nécessairement être vrai de f, f_1, &c. Maintenant, nous savons que le symbole d [de différentiation] est soumis à ces lois

[18] Boole, G., 1854, p. 19.

[19] Whately, R., 1826, *Elements of logic, comprising the substance of the article in the Encyclopædia Metropolitana, with additions, &c.*, Oxford. Whately, lui-même ancien « fellow » d'Oriel College, affirme le caractère collectif de cette entreprise, assumant clairement sa dette à l'égard du Révérend Edward Copleston et du Révérend J. Newmann, tous deux également d'Oriel College, ainsi que de Nassau W. Senior (pp. i-xxiii)

[20] Boole, 1854, p. 74, pp. 116-121 et pp. 145-150.

[21] Boole, 1854, p. 81.

[22] Gregory, D. F., 1840, « On the Real Nature of Symbolical Algebra », *Transactions of the Royal Society of Edinburgh,* 14, pp.208-16.

[23] Les égalités littérales deviennent des formes équivalentes, et relèvent du symbolique dans la mesure même où leur expression indique seulement deux façons différentes de pratiquer la même opération. Ainsi $\frac{1}{1-x}$ et $(1 + x + x^2 + x^3 + \&c)$ sont deux formes universellement équivalentes dans l'Algèbre Symbolique de Peacock parce que $(1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + \&c) = 1$, indépendamment du problème que posent ces écritures en arithmétique lorsque, par exemple, x = 1.

$d^m.d^n(x)=d^{m+n}(x)$

$\frac{d}{dx}(\frac{d}{dy}(z))=\frac{d}{dy}(\frac{d}{dx}(z))$

$d(x) + d(y) = d(x+y)$

et qu'il en est de même pour Δ [symbole de différence finie]. Alors, le théorème du binôme…… qui a été prouvé pour (a) et (b), est également vrai pour $(\frac{d}{dx})$, *et* $(\frac{d}{dy})$ »[24].

Augustus de Morgan (1806-1871), également disciple de Peacock, et avec qui Boole entretient une correspondance[25] suivie à partir de 1842, travaille dans la même problématique. En 1849, il explicite la possibilité d'une multiplicité de « systèmes symboliques », avec leurs conditions de validité :

« *Tout système de symboles qui obéit à ces règles et à aucune autre – en dehors de celles qui sont formées par combinaisons de ces règles – et qui utilisent les précédents symboles et aucun autre – sauf s'il s'agit de nouveaux symboles inventés comme abréviation de combinaisons de ces symboles – est une algèbre symbolique* »[26].

Dans cette perspective, l'universalité des lois de combinaison suppose donc que leurs symboles soient détachés de ceux sur lesquels elles opèrent, et que leurs propriétés soient transcrites indépendamment de toute interprétation. La question de la signification des symboles ne devient secondaire qu'en apparence. L'intérêt pour la signification ne disparaît pas fondamentalement, puisque c'est la signification des opérations elles-mêmes qu'il s'agit ici de renouveler : elle n'est plus assurée par l'existence de résultats issus des techniques de calcul, mais par la permanence des lois qui régissent l'universalité des opérations ; elle n'est pas supposée relever d'une opération particulière, mais valoir comme loi universelle, en tant que système symbolique. Elle présuppose de fait la conception philosophique de Locke des opérations de l'esprit, s'exerçant sur n'importe quel fruit de l'expérience.

1.2. La problématique symbolique dans l'œuvre de Boole

Dès 1847, Boole revendique l'approche symbolique pour se démarquer d'un empirisme qui envisage l'algèbre comme un simple système de notations, réduisant les méthodes analytiques à un calcul mécanique, susceptible de s'exercer indépendamment de toute réflexion. John Stuart Mill (1806-73) se trouve directement contesté :

« *Si l'utilité de l'application des formes mathématiques à la science de la logique était seulement une question de Notation, je pourrais me contenter d'appuyer la défense de cette tentative sur un principe qui a été établi par un éminent auteur vivant : "A chaque fois que la nature du sujet permet de conduire mécaniquement sans danger le processus de raisonnement, le langage peut être construit sur autant de principes mécaniques qu'il est possible ; tandis que dans le cas contraire, il y aura le plus grand obstacle possible à un simple usage mécanique de ce langage" [J.S. Mill, vol ii, p. 292,* System of Logic, Ratiocinative and Inductive*]* ...

---

[24] Gregory, D. F., 1839, « On the solution of linear differential equations with constant coefficients », *Cambridge Matematical Journal*, 1, pp. 22-35; et (éd.) Walton, W., 1865, *Mathematical Writings*, Cambridge, Deighton. London, Bell & Daldy, pp. 14-27.

[25] (éd.) Smith, G.C., 1982, *The Boole De Morgan Correspondance. 1842-1864,* Oxford, Clarendon Press.

[26] De Morgan, A., 1849, *Trigonometry and Double Algebra,* London, Taylor, Walton and Maberly, pp. 103-104..

« Ceux qui connaissent l'état présent de la théorie de l'Algèbre Symbolique savent que la validité des processus de l'analyse ne dépend pas de l'interprétation des symboles employés, mais seulement des lois de leur combinaison »[27].

Alors qu'en 1847, Boole reprend le plan de la logique scolastique[28], via le traité de Whately, pour l'exprimer sous la forme d'un calcul symbolique, en 1854, il annonce d'emblée son ambition philosophique : « étudier les lois fondamentales des opérations de l'esprit », en se réclamant explicitement de Bacon et de Locke. Il ne s'agit donc pas de rejeter les acquis de l'expérience : les formes algébriques obtenues par la symbolisation pragmatique du calcul sont pleinement acceptées par ces algébristes. Il s'agit de dégager le sens des opérations de leur origine arithmétique, qui n'a plus lieu d'être dès que les calculs s'appliquent aux « quantités négatives », aux « quantités impossibles », ou pire encore aux « symboles de différentiation ». L'enjeu est de taille : supposer que les formes algébriques expriment ces « lois fondamentales » permet d'en garantir l'universalité tout en les préservant du soupçon d'exprimer un calcul mécanique susceptible de s'exercer sans pensée. Dans cette perspective, Boole n'est pas seulement concerné par l'analyse du raisonnement certain – le raisonnement déductif –, mais par celle du raisonnement probable, comme l'annonce l'intégralité de son titre : *An Investigation on the Laws of Thought, on which are founded the mathematical Theories of Logic and Probabilities*.Aussi bien l'algèbre symbolique que la logique de Boole impulsent un tournant radical : là où Newton avait installé les mathématiques comme « principes de la philosophie naturelle », exprimés géométriquement, cette référence constante, explicite ou implicite, à la philosophie de Locke les fait basculer du côté des sciences de l'esprit. Et ce sera en effet, bien avant la « crise des fondements », l'enjeu fondamental des débats relatifs aux mathématiques tout au long du 19ème siècle :

« *L'objet de la logique n'est pas seulement de nous apprendre à mener des inférences valides étant données certaines prémisses , et le but de la théorie des probabilités n'est pas non plus uniquement de nous enseigner à établir les problèmes d'assurance sur des fondements solides ; ou à extraire ce qu'il y a de plus digne d'intérêt dans les innombrables observations enregistrées en physique astronomique ou dans ce domaine de recherches sociales qui est très vite en train de prendre en tour important. Ces deux sciences présentent également un intérêt autre, qui découle de la lumière qu'elles projettent sur nos facultés intellectuelles* »[29].

Ce calcul symbolique a donc ici fonction de dévoilement, permettant de « dépasser la connaissance purement perceptive que nous avons du monde et de nous-mêmes ». Si Boole présuppose explicitement que « les opérations de l'esprit sont soumises à des lois et qu'une science de l'esprit est par conséquent possible », plutôt que d'en donner un exposé *a priori,* une présentation axiomatique, il privilégie une démarche qui peut être qualifiée d'expérimentale : il s'appuie sur l'observation de ce qu'il affirme comme étant le fonctionnement effectif du langage pour en dégager les lois de formation. Comme chez Peacock, c'est l'expérience qui suggère[30], qui révèle l'existence de lois considérées comme pré-existantes, mais cachées à l'exercice ordinaire. La tâche de l'algébriste logicien se trouve facilitée du fait que, contrairement aux sciences de la nature, dont « les lois générales ne sont pas des objets immédiats de perception », et doivent être « induites d'un vaste ensemble de faits », ou « posées comme hypothèses » :

« *La connaissance des lois de l'esprit n'a pas besoin de se fonder sur un vaste ensemble d'observations. La vérité générale y est aperçue dans l'exemple particulier…. [et] il est*

---

[27] Boole, 1847, p. 2-3.
[28] De l'analyse de la proposition et de ses différents modes de conversion, à celle des syllogismes.
[29] Boole, 1854, p. 22.
[30] Peacock, 1833, p. 194. Boole, 1854, p. 25.

un fait non moins important lié à celui-là : notre connaissance des lois qui fondent la sciences des facultés intellectuelles… n'est pas une connaissance probable »[31].

Boole corrobore l'existence de telles lois par l'accord étonnant entre les « innombrables langues et dialectes de la terre »[32]. Sa recherche d'une « méthode générale en logique » fait donc doublement écho à celle qu'il a menée en 1844 d'une « méthode générale en analyse ». Les deux méthodes se veulent plus fondamentales que celles qui proviennent trop directement de la pratique ordinaire : celle de la simple « littéralisation » de l'arithmétique en algèbre, celle de la logique scolastique dont l'objet, comme le soutient le logicien écossais Sir William Hamilton (1788-1856)[33], n'est pas le raisonnement lui-même, mais son produit. Comme Locke lorsqu'il affirmait vouloir décrire le fonctionnement de l'esprit humain en se démarquant à la fois de la physiologie et de la métaphysique, Boole travaille à l'élaboration d'une science positive de la logique :

« *Il est sans doute possible à l'esprit de parvenir à la connaissance des lois auxquelles il est lui-même soumis, sans qu'il lui soit également donné de comprendre leur fondement et leur origine ; ni même, sinon à un très faible degré, de comprendre leur adéquation à leurs fins lorsqu'on les compare à d'autres systèmes de lois également convenables. En réalité une telle connaissance n'est pas nécessaire au but de la science qui ne s'occupe véritablement que de ce qui est, et ne recherche pas les raisons qui ont présidé à un tel choix, ni le pourquoi d'une telle préférence* »[34].

Fort de ces considérations – qui l'incitent à se démarquer de Descartes comme de Stuart Mill – et de sa conviction que « l'esprit est lui-même le siège de lois qui opèrent d'une façon aussi manifeste et concluante dans les formules particulières que dans les générales »[35], il se livre à la symbolisation de ce fonctionnement opératoire de la pensée, selon un mode combinatoire allant du simple au composé, et qu'il va repérer en parallèle dans la structuration du langage[36], et dans ce qu'il envisage comme l'opération mentale de sélection de classes d'objets[37].

Le langage est envisagé comme un système finalisé, ayant pour but l'exercice de la raison humaine[38]. Dans ce système, les mots interviennent comme signes représentatifs – de choses, d'opérations, de relations – c'est-à-dire comme « marques arbitraires », dont la signification ne dépend pas de leur forme, comme c'est également le cas des symboles mathématiques. Si l'interprétation d'un signe peut donc être choisie, elle doit rester la même « dans les limites d'un même discours ou d'un même raisonnement »[39]. Selon la méthodologie précédemment définie, Boole va donc successivement établir que :

« *La combinaison xy représente la classe des choses auxquelles peuvent simultanément s'appliquer les noms ou descriptions représentés par x et y. Ainsi si s seulement*

---

[31] Boole, 1854, pp. 23-24. Boole soutient à nouveau cette « claire manifestation du principe général dans l'exemple particulier » p. 82-83..

[32] Boole, 1854, p. 43.

[33] Hamilton, W., 1836, « On the study of mathematics, as a exercise of mind », *Edinburgh Review*, jan. 1836, p. 409-55, rééd. dans *Discussions on Philosophy and Literature, Education and University Reform, chiefly from the Edinburgh Review*, London, 1852.

[34] Boole, 1854, p. 30.

[35] Boole, 1854, p. 40.

[36] Boole, 1854, chapitre 2.

[37] Boole, 1854, chapitre 3.

[38] Les considérations de Locke sur la langage comme condition de l'échange social sont absentes de la problématique de Boole.

[39] Boole, 1854, pp. 43-44.

remplace « choses blanches » et y « moutons », posons que xy représente « moutons blancs »....
L'ordre dans lequel deux symboles sont écrits est indifférent… Dès lors, nous avons :

$$xy = yx \qquad (1)$$

[Pour deux] classes tout à fait distinctes, de sorte qu'aucun élément de l'une ne soit élément de l'autre, l'expression « hommes et femmes » est équivalente… à l'expression « femmes et hommes ».... nous avons alors :

$$x + y = y + x \qquad (2)$$

Soit z le symbole représentant l'adjectif « européen » ; alors, comme il revient en fait au même de dire « les européens hommes et femmes » et « les hommes européens et les femmes européennes », nous avons :

$$z(x + y) = zx + zy \qquad (3)$$ »[40].

Aussi bien la commutativité du « et » et du « ou » (exclusif) en logique, et la distributivité du « et » par rapport au « ou »[41] s'écrivent donc de la même manière que les mêmes propriétés pour les lois (.) et (+) en algèbre. Analogies remarquables, mais dont Boole se démarque immédiatement, pour les installer comme révélatrices d'un ordre sous-jacent, exprimées par le principe de transfert de Gregory, qu'il reprend à son compte à plusieurs reprises dans cet ouvrage. Par exemple, en ce qui concerne le « et » :

« *La loi exprimée par (1) sera mieux caractérisée si l'on souligne que les symboles littéraux x, y, z sont commutatifs comme les symboles algébriques. En disant cela, on n'affirme pas que l'opération de multiplication en algèbre, dont la loi fondamentale est exprimée par l'équation xy = yx présente en elle-même une analogie avec l'opération de composition logique, représentée plus haut par xy : mais seulement que si les opérations arithmétique et logique sont exprimées de la même manière, leurs expressions symboliques seront sujettes à la même loi formelle* »[42].

Selon ce « principe de transfert », Boole peut donc délibérément utiliser en logique, et sans démonstration, toutes les conséquences algébriques de ces propriétés – commutativité et distributivité – et pratiquer un calcul algébrique aveugle sur les classes d'objets, calcul qu'il investira complètement dans le traitement du syllogisme. Ce sont ces propriétés obtenues algébriquement que Boole énonce sous forme d' « axiomes », mais au sens lockéen du terme, en tant que principes qui ne sont posés qu'*a posteriori*, afin d'éviter de reprendre à tout moment la légitimation des résultats acquis par toutes les étapes de cette longue pratique historique[43].

1.3. L'algèbre spéciale de la logique booléenne

Ce transfert entre propriétés algébriques et propriétés logiques, entièrement soumis à leur identification formelle, n'implique cependant pas une identité absolue entre calcul algébrique et calcul logique. Boole s'appuie aussi bien sur l'analyse phénoménale du langage, que sur l'opération mentale de sélection d'une classe d'objets pour introduire une loi fondamentale spécifique de la logique, qui conduit à la distinguer strictement de

---

[40] Boole, 1854, pp. 36-51.Boole symbolise ici le « ou » exclusif, qui a pouvoir de séparation ou d'exclusion (p. 70). Il définira le « ou » inclusif un peu plus tard (p. 71) quand il sera en mesure de symboliser l.

[41] Ces termes sont utilisés par Boole sur les traces de Gregory et du mathématicien français François-Joseph Servois (1767-1847) dans les *Annales de Gergonne* en 1814-15.

[42] Boole, 1854, pp. 48-49, mais aussi p387 pour une réflexion générale sur l'analogie comme révélatrice d'un ordre sous-jacent. .

[43] Locke, J., 1694, Essay on Human Unedrstanding, trad. frçse M. Coste, 1755 Essai philosophique sur l'entendement humain, Paris. § IV.7.11.

l'algèbre ordinaire, créant ainsi ce qu'il considère lui-même comme une « algèbre spéciale ».

« *Si deux symboles ont exactement la même signification, leur composition n'exprime rien de plus que ce que l'un ou l'autre exprimait séparément. .... Conformément à [la] notation [de l'algèbre ordinaire], nous [aurons] par conséquent :*

$$x^2 = x$$ »[44].

Cette équation, une fois de plus considérée algébriquement, et écrite sous la forme $x - x^2 = 0$, puis $x(1 - x) = 0$, n'admet que deux solutions en algèbre ordinaire : 0 et 1. Le calcul logique de Boole fait donc intervenir des symboles qui désignent des classes d'objets, et qui ne peuvent prendre comme valeurs que 0 et 1, auxquelles Boole va conférer une interprétation en logique. Il leur attribue respectivement la représentation du « Rien » et de l' « Univers » – au sens de l' « univers du discours »[45] c'est-à-dire de la totalité d'une classe – qui sont les deux bornes de l'extension d'une classe.

L'écriture $x(1 - x) = 0$ permet en outre de spécifier $1 - x$ comme « classe contraire », ou complémentaire de la classe x dans l'univers considéré, et d'affirmer qu'il n'existe rien de commun entre la classe « x » et la classe « 1 – x », c'est-à-dire que « le principe de contradiction qu'Aristote a qualifié d' « axiome fondamental de toute la philosophie » n'apparaît ici que comme conséquence d'une « loi de la pensée, mathématique dans sa forme », que Boole appelle « loi de dualité »[46].

Cependant, cette science positive des facultés intellectuelles, qu'il vient d'élaborer *a posteriori* à partir de ses « effets phénoménaux », se trouve totalement confirmée par l'examen des opérations de l'esprit qui interviennent dans cet usage du langage, ceci sans avoir à recourir à une quelconque hypothèse sur la nature et les facultés de l'esprit :

« *Si les lois en question sont véritablement inférées à partir de l'observation, elles possèdent une existence réelle en tant que lois de l'esprit humain, indépendamment de toute théorie métaphysique qui peut paraître impliquée par la manière de les formuler…*
Le mot homme nous conduit à sélectionner mentalement…. tous les êtres auxquels le terme d'« hommes » peut s'appliquer, de même l'adjectif « bon » dans la combinaison « hommes bons » nous conduit ... à sélectionner mentalement, dans la classe des hommes, tous ceux qui possèdent la qualité supplémentaire d'être « bons »…..
[Et] les lois du symbole et de la procédure mentale sont identiques dans leur expression »[47].

Telles sont les articulations fondamentales de la logique de Boole, et qui concerne essentiellement la logique des classes. Elle se veut indépendante de toute métaphysique, affirmant partir de l'observation effective du langage, dans son strict usage comme instrument de raisonnement, afin de dépasser le débat entre « ceux qui croient et ceux qui refusent de croire que la relation de cause à effet contient plus qu'un ordre invariable de succession »[48]. En dépit de cette remarque, par laquelle Boole se démarque sans les nommer de Stuart Mill, et surtout de David Hume (1711-1776), il est profondément marqué par leurs objections philosophiques, comme en témoignent essentiellement la valorisation de l'expérience et du probable, et la place subordonnée

[44] Boole, 1854, p. 49.
[45] La notion d'univers du discours est ici empruntée à Augustus de Morgan (1806-71), dont la querelle de priorité avec Sir William Hamilton avait servi de motivation à Boole pour sa publication de 1847.
[46] Boole, 1854, pp. 65-66.
[47] Boole, 1854, p. 57 et p. 59.
[48] Boole, 1854, p. 56.

de la logique de la déduction par rapport à la logique des classes, avec le rôle spécifique accordé au temps dans cette subordination.

1.4. L'analyse des classes et la notion de fonction dans la logique de Boole

Le « principe de transfert », que Boole mobilise de façon cruciale pour concevoir la logique des classes, s'appuie sur la confiance en la permanence de l'écriture algébrique symbolique, censée exprimer les lois de combinaison des opérations de l'esprit. En première lecture, la notion d'opération y est donc bien plus prégnant que la notion de fonction. C'est la notion d'opération qui gère l'équilibre entre permanence et changement : l'opération est le seul gage d'universalité, en ce sens qu'elle agit selon des lois ; ses résultats ne sont que les produits des transformations qu'elle régule, et ils dépendent, eux, des données de l'expérience.

Boole a également recours à la notion de fonction pour ce qui est de l'analyse détaillée du contenu des classes, spécifiant les séparations d'un univers du discours en ses différentes parties constituantes selon les propriétés qu'elles possèdent ou ne possèdent pas. C'est ce qu'il appelle « la forme générale développée de l'expression d'une classe quelconque d'objets par rapport à la possession ou au manque de propriétés données » – ou le « développement de la fonction » – qui est essentielle à la généralité de sa méthode, et qui correspond à ce qu'on appelle aujourd'hui la « forme normale » des formules propositionnelles. Boole mathématicien met ici en œuvre l'état des connaissances de son temps et de son milieu intellectuel sur le concept de fonction, tel qu'il est théorisé dans la première moitié du 19ème siècle[49]. Une fonction n'est pas appréhendée comme aujourd'hui en tant que cas particulier d'une relation tout à fait générale entre deux ensembles. Certes, le caractère de dépendance entre les valeurs de la variable – ou des variables – et celles de la fonction est largement soulignée depuis Leonhard Euler (1707-1783). Mais l'expression analytique du calcul qui établit cette dépendance retient davantage l'attention, surtout dans la perspective lagrangienne qui nourrit les algébristes de la Société Analytique. Pour eux, toute fonction est considérée avant tout comme une expression algébrique symbolique. Son développement en série de Taylor[50] :

$$u(z+x) = u(z) + \frac{du}{dz}x + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{x^2}{2!} + \frac{d^3u}{dz^3}\frac{x^3}{3!} + \&c.$$

où les $\frac{d^r u}{dx^r}$ sont les dérivées successives de u(z), qui spécifie une relation forte entre calcul des différences finies et calcul différentiel, est alors au cœur de leurs préoccupations. Boole en reprend l'expression en 1847 dans le cadre de son calcul logique, qui lui offre une simplification majeure du fait que, dans cette « algèbre spéciale », $x^2 = x$, et de proche en proche, $x^3 = x$, …, $x^r = x$. Ce qui lui permet d'annoncer directement en 1854 :

---

[49] Youschkevitch, A.P., 1976-77, « The concept of function up to the middle of the 19th century », *Archive for History of Exact Sciences,* vol. 16, n° 1, 37-85, trad. frçse dans *Fragments d'histoire des mathématiques,* Brochure APMEP. 1981, 7-68.

[50] Ce développement en série de Taylor permet d'approcher par le calcul des fonctions plus compliquées que les seules fonctions polynomiales, comme les fonctions trigonométriques, logarithmiques, exponentielles, voire même arbitraires. Même si A.L. Cauchy (1789-1856) à établi en 1821 que toute fonction n'admet pas nécessairement un développement en série de Taylor, ce que pensait avoir démontré Lagrange, ce développement va rester utilisé par les algébristes anglais dans le cadre du calcul symbolique sur les opérations.

« *Définition 8 : Toute expression algébrique contenant un symbole x est appelée une fonction de x et peut s'écrire sous la forme agrégée générale f(x). ...*
Définition 9 : Une fonction f(x), où x est un symbole logique, ou un symbole de quantité n'ademttant que les valeurs 0 et 1, est dite développée lorsqu'elle est ramenée à la forme f(x) = ax + b(1 – x), a et b étant déterminés de telle sorte que le résultat soit équivalent à la fonction dont il est dérivé »[51].

L'identification des deux membres lui permet alors d'écrire cette forme développée pour n'importe quelle fonction, sans connaître son interprétation, sous la forme :

$$f(x) = f(1).x + f(0).(1 - x)$$

et de même, pour une fonction de deux ou trois variables :

$$f(x,y) = f(1,1).xy + f(1,0).x(1 - y) + f(0,1).(1 - x)y + f(0,0).(1 - x)(1 - y)$$

et

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = {} & f(1,1,1).xyz + f(1,1,0).xy(1 - z) \\ & + f(1,0,1).x(1 - y)z + f(1,0,0).x(1 - y)(1 - z) \\ & + f(0,1,1).(1 - x)yz + f(0,1,0).(1 - x)y(1 - z) \\ & + f(0,0,1).(1 - x)(1 - y)z + f(0,0,0).(1 - x)(1 - y)(1 - z) \end{aligned}$$

Boole annonce alors la méthode dans un énoncé général, présenté comme une règle. Il lui suffit alors, pour une fonction donnée f(x), de faire les identifications nécessaires avec les valeurs 0 et 1 des variables, pour spécifier la valeurs des cœfficients affectant chaque constituant. Propriété remarquable, démontrée par le calcul logique et longuement commentée par Boole : ces constituants sont deux à deux disjoints et forment ensemble l'univers du discours[52], ils en forment donc ce qu'on appelle aujourd'hui une « partition », selon que les éléments appartiennent ou non aux classes symbolisées par x, y, z. Le découpage de l'univers du discours en ses différentes classes est ainsi donné par une expression purement formelle de calcul.

Boole consacre alors le chapitre 6 à déterminer en toute généralité « les canons de l'interprétation »[53], c'est-à-dire de la signification à donner aux développements logiques ainsi obtenus, écrits sous forme équationnelle, et accompagnés d'exemples illustratifs[54]. L'interprétation dépend de la valeur des cœfficients obtenus. Le cœfficient 1 indique ainsi que « la totalité de la classe représentée doit être prise en compte », le cœfficient 0 que « rien dans la classe n'est pas prendre en compte ». Et Boole, sur les traces de ses condisciples du courant symbolique, n'hésite pas à faire intervenir des cœfficients tels que 1/0 et 0/0, qu'il utilise respectivement comme symboles d'impossibilité et d'indétermination. « Tout autre symbole figurant comme cœfficient indique que le constituant auquel il est lié doit être égalé à 0 ».

La généralité de la méthode couvre ainsi tous les cas possibles. Le calcul ne dépend pas de l'existence effective des classes de la partition, dont il détermine au contraire la situation spécifique. Boole manipule donc la fonction, comme l'opération, de manière formelle, mais en restant au plus près de son expression de calcul dans le cas numérique, grâce aux significations symboliques qu'il choisit pour 1, 0, 1/0 et 0/0.

1.5. Le rôle subordonné de la logique des propositions

---

[51] Boole, 1854, p. 85.
[52] Boole, p. 91 et p. 94.
[53] Boole, 1854, p. 104.
[54] « La définition que donne la loi juive des « bêtes pures » : les bêtes pures sont celles qui ont les sabots fendus et qui ruminent » fait l'objet de plusieurs développements approfondis (pp. 96-105), ainsi que des exemples à forte connotation morale, du type : « Les êtres responsables sont tous les êtres rationnels qui soit sont libres d'agir, soit ont sacrifié volontairement leur liberté » (p. 106-109).

Boole s'inscrit donc dans une conception synchronique du langage, s'attachant à un processus de sélection des classes qui est envisagé indépendamment des études concrètes qui président à leur élaboration. C'est sans doute là ce qui permet à I. Grattan-Guinness de qualifier sa démarche d'anti-psychologisme. Boole ne se situe pourtant pas sur ce terrain, qui sera plutôt celui d'un de ses adversaires, comme Sir W. Hamilton, qui invoque le psychologisme pour s'opposer au formalisme. Comme ses amis algébristes, il respecte l'expérience, mais n'en intègre les résultats que là où ceux-ci permettent de procéder à une abstraction formelle, dont ils préfèrent présupposer l'existence plutôt que d'en admettre la créativité.

Ayant procédé à l'analyse des classes, et de leurs agencements possibles en termes de produit et de somme, Boole nomme des classes « propositions primaires » ou « concrètes », qui concernent les « choses ». Il traite alors en termes de classes des quatre propositions de base de la logique scolastique[55], qu'il donne sous forme équationnelle.

Quant aux relations entre propositions, du type « il est vrai que le soleil brille », ou « si le soleil brille, la journée sera belle », qu'il nomme « propositions secondaires » ou « abstraites », Boole les appréhende comme des jugements sur les propositions primaires, et va les étudier à partir du calcul qu'il a établi pour celles-ci. Il invoque à leur propos une analogie « étroite et harmonieuse » avec les propositions primaires, analogie qui révèle, dit-il comme ses condisciples du courant symbolique, « l'unité de nature qui marque la constitution des facultés humaines », ainsi que :

« *l'existence dans l'esprit – qui a été doté de facultés si élevées et dont il use non seulement dans ses relations au monde qui l'entoure, mais aussi pour se connaître lui-même et réfléchir aux lois de sa propre constitution – d'une harmonie et d'une uniformité qui ne sont pas moins réelles que celles que nous fait connaître l'étude des sciences de la nature* »[56].

Cette analogie repose selon lui sur une référence au temps au cours duquel une proposition est vraie. Par exemple, pour la proposition : « Si la proposition X est vraie, la proposition Y est vraie » :

« *Une signification avérée de cette proposition est que le temps durant lequel la proposition X est vraie est le temps durant lequel la proposition Y est vraie. Il ne s'agit là, en fait, que d'une relation de coexistence qui peut ou non épuiser la signification de la proposition mais qui découle véritablement de son énoncé et qui, en outre, suffit à tous les objectifs de l'inférence logique* »[57].

Partant de cette analogie, et de cette référence au temps qu'il abandonnera assez vite pour se référer directement aux propositions elles-mêmes, Boole affirme que les propositions secondaires relèvent des mêmes lois logiques, et donc des mêmes méthodes et des mêmes procédures que les propositions primaires. Il peut ainsi établir, pour les propositions secondaires, un calcul logique formel équivalent au calcul sur les propositions primaires qu'il vient d'élaborer. Cette façon dont Boole fait ainsi dépendre le caractère déductif du raisonnement de l'existence préalable des classes d'objets témoigne de l'impact de la philosophie de Hume, qui ramène le déductif à l'habitude

[55] Il s'agit de l'universelle affirmative (A : tout S est P), de l'universelle négative (E : nul S n'est P), de la particulière affirmative (I : quelques S sont P), et de la particulière négative (0 : quelques S ne sont pas P).
[56] Boole, 1854, p. 163.
[57] Boole, 1854, p. 167.

d'un ordre de succession entre les phénomènes[58]. Cette référence au temps ne l'incline cependant pas à s'inscrire dans la lignée de Kant, qu'il ne cite pas directement mais dont il se démarque clairement, ainsi que de tous ceux qui « considèrent l'espace et le temps comme étant simplement des « formes de l'entendement humain », comme les conditions de la connaissance que la constitution même de l'esprit impose à tout ce qui est soumis à son appréhension »[59]. Il lui est d'autant plus facile de prendre ses distances à l'égard de cette conception philosophique que les procédures analytiques de résolution de problèmes géométriques permettent d'envisager la possibilité pour « l'espace d'exister avec quatre dimensions ou davantage », ce qu'il précise en note.

Ce calcul logique de Boole conduit de fait à une extension considérable de la théorie du syllogisme d'Aristote. Dans la logique scolastique, construire un syllogisme revient à éliminer le moyen terme entre les deux prémisses, dans les cas où il est possible d'obtenir une proposition vraie entre le terme majeur et le terme mineur, en supposant que les deux prémisses sont également vraies. Dans le calcul booléen, toute proposition s'écrit sous forme équationnelle, et la loi de dualité $x(1 - x) = 0$, la loi fondamentale des symboles logiques, vient s'ajouter aux équations données pour tous les symboles de classe. Il devient alors possible d'éliminer un nombre quelconque de variables entre un nombre quelconque d'équations[60]. Ce qui permet d'obtenir et d'étendre par le même calcul aussi bien les règles d'inférences immédiates – relatives à la proposition seule – que les règles d'inférence médiates – qui concernent plusieurs propositions. La logique scolastique, ainsi que les récents apports de De Morgan et de Sir W. Hamilton, se trouvent ainsi renvoyés au chapitre 15, après bien d'autres développements de cette méthode générale.

1.6. La méthode générale de Boole appliquée aux probabilités

La partie de l'*Investigation on the Laws of Thought* consacrée à la théorie des probabilités est la plupart du temps totalement ignorée, ne serait-ce qu'en raison du raccourci souvent imposé au titre de l'ouvrage. Elle occupe pourtant six chapitres, soit plus d'un tiers du volume, et donne toute la mesure du projet booléen. Charles S. Peirce (1839-1914),dès 1867, y verra le principal usage du calcul booléen[61]. Il s'agit, là encore et surtout, de fonder la supériorité de la théorie, dégagée de l'expérience en tant que méthode générale, sur les lois des opérations de l'esprit[62], envisagées comme principes organisateurs d'une science de l'esprit. Ce travail est loin d'être anecdotique ou marginal. Les références de Boole dans ces chapitres témoignent d'une connaissance approfondie des travaux de ses contemporains, essentiellement ceux de Condorcet, Laplace, Poisson, Quételet et Cournot, ainsi que de l'intérêt spécifique des algébristes du courant symbolique pour la théorie des probabilités[63]. Sa problématique est toujours la même. Il part des résultats obtenus, donc de l'expérience acquise : il

---

[58] Hume, D., *A Treatise on Human Nature,* London, 1739.

[59] Boole, 1854, p. 177. Samuel T. Coleridge (1772-1834) et William Whewell (1794-1866) ont introduit la philosophie de Kant en Angleterre. Et en 1837, le mathématicien William Rowan Hamilton (1805-1865), l'auteur des quaternions, a élaboré de son côté, à partir de ses propres réflexions sur la physique, une théorie des nombres complexes en envisageant l'algèbre comme « science du temps pur ».

[60] Boole, 1854, ch. 7 : l'élimination ; ch. 8 : la réduction des systèmes de propositions.

[61] Diagne, S.B., 1989, p. 202.

[62] C'est le titre du chapitre 17, qui structure la présentation des chapitres suivants, dans Boole, 1854.

[63] Les travaux cités sont : Laplace, P. S. de, 1814, *Théorie analytique des probabilités,* Paris, ; Poisson, S. D., *Recherches sur la probabilité des jugements,* Paris, ; Cournot, *Exposition de la Téorie. des Chances,* Paris ; ainsi que Condorcet ; et en Angleterre De Morgan, A., « Probability », *Encyclopædia. Metropolitana,* London, ; et Donkin, W. F., 1851, *Philosophical Magazine.* Ils concernent aussi bien les sciences physiques (évaluation des erreurs attachées à l'observation en astronomie) que les sciences sociales (probabilité des jugements) et l'épistémologie (analyse des relations de cause à effet).

commence donc par spécifier l'état des connaissances (ch. 16), en marquant soigneusement, sur les traces de Poisson, la distinction entre « probabilité » et « mesure de probabilité », c'est-à-dire entre l'aspect philosophique et l'aspect calculatoire de la notion de « probabilité » :

« *Poisson, dans ses* Recherches sur la probabilité des jugements, *a établi les définitions fondamentales de cette science :*
- la probabilité d'un événement est la raison que nous avons de croire qu'il a eu lieu, ou qu'il aura lieu,
- la mesure de la probabilité d'un événement est le rapport du nombre de cas favorables à cet événement au nombre total de cas favorables ou contraires et tous également possibles (également vraisemblables)…
Notre espérance de l'événement variera selon la quantité d'information que ns possédons sur ces circonstances.
La probabilité est une espérance fondée sur une connaissance partielle…
Une connaissance parfaite de toutes *les circonstances concernant l'occurrence d'un événement ferait de l'espérance une certitude* »[64].

Cette conception des probabilités, héritée de Laplace, permet à Boole de les envisager comme branche de la logique, sans incompatibilité aucune avec l'affirmation lockéenne du caractère fatalement incomplet des connaissances humaines. Partant de ce double héritage, Boole se dégage cependant des pratiques de ses condisciples, qui consiste à construire une théorie des probabilités conditionnelles sur la probabilité d'événements indépendants. Il estime hasardeuse cette hypothèse des événements indépendants, car c'est bien souvent une spécificité qu'on ignore quand on aborde ces questions[65]. A ce propos, il se livre à une analyse épistémologique explicite du fait que la « simplicité » attribuée aux événements ne concerne pas leur nature, mais seulement l'état de notre connaissance :

« *Je remarquerai tout d'abord que la distinction entre événements simples et événements composés n'est pas fondée sur la nature des événements eux-mêmes, mais sur la manière dont ils se présentent à l'esprit et le rapport sous lequel celui-ci les conçoit. …. L'usage prescriptif du langage, qui a assigné à des combinaisons particulières d'événements des noms uniques et déterminés, tout en laissant quantité d'autres combinaisons s'exprimer par des combinaisons correspondantes de termes ou de phrases, est essentiellement arbitraire* »[66].

La simplicité à laquelle Boole s'attaque ici est donc d'ordre grammatical. Conformément à la perspective lockéenne, Boole préfère s'appuyer, dit-il, sur la combinaison des opérations, et donc, de ce fait, sur la considération d'événements quelconques, qu'il envisage comme composés d'événements simples. Il considère alors, de la même façon, les probabilités des événements composés comme combinaison des probabilités des événements simples qui les constituent. S'appuyant sur la méthode générale qu'il a élaborée dans les chapitres précédents, il décide :

« *[de] substituer aux* événements, *les propositions qui affirment que ces événements se sont produits ou vont se produire ; et [de] considérer que l'élément de probabilité se rapporte à la* vérité *de ces propositions et non à l'*occurrence des événements *à propos desquels elles affirment quelque chose* »[67].

[64] Boole, 1854, pp. 241-242.
[65] Il ne la fera donc intervenir qu'ultérieurement comme cas particulier.
[66] Boole, 1854, p. 252.
[67] Boole, 1854, p. 245.

Ce glissement subreptice des événements aux probabilités élude – au moins provisoirement – l'analyse de l'adéquation des unes aux autres. Pour l'heure, il lui permet de transférer aux probabilités toute la méthode qu'il a élaborée pour le calcul des propositions primaires, et déjà transférée aux propositions secondaires. Il redémontre donc les résultats de ses prédécesseurs dans le cadre de cette méthode, et dans l'ordre qu'elle implique. En particulier, l'indépendance des événements ne relève pas pour Boole des principes : elle ne saurait faire partie de la généralité de la méthode, car elle « ne repose pas sur [leur] simplicité », mais seulement sur l'état des connaissances, sur « le fait que les données ne fournissent aucune information concernant un lien ou une dépendance entre eux »[68].

Conformément à la démarche symbolique, la question des données ne relève aucunement de la théorie des probabilités. Elle fait d'ailleurs l'objet d'un chapitre séparé, intitulé « Conditions statistiques ». Elle concerne le passage des observations statistiques d'un événement, à la détermination de sa probabilité, et suppose un passage à la limite. Elle relève donc du champ numérique –comme chez Peacock – et aucunement de la méthode générale, fondamentalement symbolique.

Le projet de Boole apparaît tout à fait clairement dans les chapitres 20 et 21 : « Problèmes concernant les relations de cause à effet » et « Application particulière de cette méthode générale à la question de la probabilité des jugements ». Boole veut substituer sa méthode générale au théorème de Bayes, qu'il ne nomme jamais[69], concernant la probabilité de causes, parce que précisément, ce théorème fait intervenir l'hypothèse de causes indépendantes les unes des autres : comme le souligne Boole depuis le début de son exposé, c'est là une donnée que nous ignorons dans la plupart des cas. Il insiste sur le fait que c'est là une hypothèse particulièrement fallacieuse, et donc très peu fiable, en prenant l'exemple de l'élaboration d'un jugement entre les membres d'une assemblée ou d'une cour de justice :

« *De ces considérations l'on peut dégager les faits et conclusions suivants :*
Premièrement, qu'à partir de la simple observation de cas d'accord et de désaccord entre les opinions d'un groupe humain quelconque, on ne peut déduire aucune conclusion, quantifiable de manière définie, quant à la probabilité de voir un membre de ce groupe avoir une opinion juste, ni quant à celle du pour et du contre dans les questions soumises à se réflexion.
Deuxièmement, que ces conclusions se peuvent déduire en faisant plusieurs hypothèses différentes, par exemple :
1) en faisant l'hypothèse de l'indépendance absolue des jugements individuels,
2) en utilisant certaines variantes définies de cette hypothèse permises par les données,
3) en utilisant un principe différent de résolution, suggéré par l'apparition d'une communauté de forme des solutions obtenues grâce aux variations en question.
Enfin : que s'il devait y avoir un doute concernant les résultats finaux, il ne tiendrait pas à l'imperfection de la méthode qui s'accorde finalement à toutes les hypothèses mais à l'incertitude des hypothèses mêmes »[70].

Boole se méfie des décisions humaines, et cherche des garanties à leur justesse. Il a donc à cœur de proposer une méthode qui permette de situer explicitement à quel moment il

---

[68] Boole, 1854, p. 253.
[69] Comme on le sait, Laplace a retrouvé indépendamment le théorème de Bayes dans son mémoire de 1774, « Mémoire sur la probabilité des causes par les événements », *Savants Étranges* 6, 621-656, repris dans *Œuvres de Laplace,* 8, 27-65.Boole s'inscrit directement dans la lignée des travaux de Laplace, et ne fait aucune référence à des travaux anglais en ce domaine, autres que ceux de ses contemporains directs, essentiellement De Morgan et Donkin.
[70] Boole, 1854, pp. 381-182.

est indispensable d'introduire des hypothèses supplémentaires avant de poursuivre la résolution d'un problème, ceci afin que chacune puisse en juger, voire puisse envisager d'autres hypothèses possibles.

1.7. La médiation du travail de Boole quant aux fondements de la connaissance

A replacer le travail de Boole dans son contexte, et à suivre scrupuleusement sa démarche et ses références, il apparaît que son *Investigation on the Laws of Thought* propose une méthode générale de raisonnement qui tente de rendre compte à la fois du raisonnement certain et du raisonnement probable. Son projet s'inscrit directement dans l'approche symbolique de l'algèbre de ses contemporains et amis, puisqu'il revendique à tout moment la séparation entre le fonctionnement des opérations de l'esprit, tel qu'il est présupposé à partir de l'expérience, et leurs éventuelles interprétations. Cette démarche ne manque pas d'une certaine souplesse :
- elle donne une place essentielle à l'expérience comme processus, non pas d'invention, mais de découverte, des lois qui gouvernent les opérations de l'esprit, et qui sont supposées universelles,
- elle cherche donc les moyens d'encadrer cette expérience sans en nier l'importance dans l'activité humaine,
- elle accorde également une place remarquable au caractère arbitraire du langage en tant que phénomène social forgé lui aussi par l'expérience. Cet arbitraire du signe, ainsi revendiqué, renvoie à la fois au caractère collectif de la convention, et à l'incomplétude de la connaissance, qu'il convient de ne pas oublier,
-elle cherche à délimiter avec précision la frontière entre les territoires respectifs de chacun de ces modes d'approche de la connaissance, afin de pouvoir apprécier avec précision à quel moment la validité du raisonnement certain ne suffit plus à conclure, et demande l'intervention d'hypothèses spécifiques, alors susceptibles d'être explicitées comme telles, et selon Boole lui-même, plus faciles à formuler pour ce qui concerne le comportement humain que les phénomènes naturels.

La question de la signification du langage – pour laquelle Boole et les algébristes parlent d' « arbitraire » et d' « interprétation » – fait donc partie de cette partie de la philosophie du langage qui manque de certitude, et pour laquelle Boole se garde donc d'intervenir. Par contre, sur les traces de ses condisciples, il renouvelle la question de la signification des opérations elles-mêmes, définies non plus par leurs résultats, mais par leurs lois de combinaison. Si ces lois de combinaisons sont alors censées expliciter le fonctionnement des opérations de l'esprit, elles sont de fait constructions qui ne cesseront de prendre de l'autonomie, aussi bien eu Grande-Bretagne que sur le Continent, par exemple dans le travail de Hermann Hankel (1839-1873) en Allemagne, qui énonce très clairement en 1867 les conditions d'extension d'un champ opératoire[71], envisageant les nombres comme créés pour assurer la permanence de la réciprocité des opérations (addition et soustraction, multiplication et division, ….).

2. Fonction et signification chez Frege

Vingt cinq ans plus tard, le travail de Frege s'incrit dans un autre contexte : celui, d'une part, des universités allemandes, d'autre part, de la science post-darwinienne[72]. Depuis la création de l'université de Berlin en 1810 autour d''Alexandre von Humboldt, la réforme radicale du système universitaire allemande a installé les mathématiques au cœur d'un système éducatif qui conjugue les idéaux de la connaissance pure et d'une

[71] Hankel, H., 1867, *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Funktionen,* Leipzig, Voss.
[72] *L'origine des espèces* de Darwin est publié en 1859.

science intégrée au système politico-économique[73]. Au delà de la philosophie kantienne, le développement des sciences inductives et le renforcement des relations entre science et industrie y confèrent un poids de plus en plus marqué à la démarche expérimentale, et à l'intervention du sujet dans l'élaboration des connaissances. Au sein même des mathématiques, le contexte est également très différent de celui dans lequel s'exprimait Boole en 1854. Frege écrit postérieurement au programme d'Erlangen de 1872, dans lequel son contemporain – et condisciple pendant ses études à Göttingen – Felix Klein (1849-1925) a intégré les nouvelles géométries – projective et non-euclidiennes – à un mode de théorisation où c'est l'adoption du point de vue qui détermine la géométrie choisie. Face à ce type de fragmentation, qui menace l'unité de la connaissance, Frege n'aura de cesse, tout au long de son cheminement intellectuel, de se démarquer de toute historicisation de la connaissance, qu'elle soit collective ou individuelle. Là où Boole utilisait les mathématiques pour exprimer la logique et en élargir le champ, le projet frégéen vise l'élaboration d'un langage logique « formulaire » qui lui permette de rendre plus rigoureuse la théorisation mathématique elle-même. Contrairement à Boole, il refuse catégoriquement le caractère possiblement aveugle de l'écriture algébrique, et revendique en permanence la nécessité d'exprimer un contenu, donc un sens, et le caractère absolu de la vérité. Mais tout comme Boole, il investit une notion mathématique – dans son cas, celle de fonction – pour formuler l'essentiel de son propos. Il s'agit d'abord pour Frege d'affirmer la permanence du concept, et la primauté de son contenu sur son extension – distinction qu'il est le premier à établir. Il laisse cependant place au sujet en séparant, au sein du langage, énonciation et jugement, l'acte de juger consistant à dire le « vrai » et le « faux ».

2.1. Frege face à l'empirisme : une philosophie de l'absolu

Bien que les premiers travaux de Frege portent sur la géométrie, et qu'il lui ait manifesté un intérêt constant dans son enseignement à Iéna[74], il est manifeste que sa préoccupation fondamentale porte sur la logique, depuis son *Idéographie* de 1879, jusqu'aux « Recherches logiques » publiées à la fin de sa vie[75]. Aussi bien dans ses publications majeures que dans les articles qu'il publie conjointement dans des revues locales[76], il ne cessera de se démarquer des philosophes et des scientifiques qui mettent en avant le rôle du sujet agissant en tant qu'individu dans l'élaboration de la connaissance scientifique. Frege refuse toute possibilité d'établir une quelconque relation entre les conceptions scientifiques – notamment celle du nombre entier – et les états de conscience du sujet. Sa critique de la *Philosophie der Arithmetik* de Husserl est à cet égard particulièrement acerbe, raillant la « maladie » que constitue le mélange de psychologie et de logique, et qualifiant d'insipides certaines de ses argumentations[77]. Les implications de la psychologie – et elles sont nombreuses, de John Stuart Mill à Edmund Husserl (1859-1938), en passant par Hermann von Helmhotz (1821-94) et

---

[73] Ferreiros J., 1999, *Labyrinth of Thought, A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics,* Basel-Boston-Berlin, Birkäuser Verlag, Science Networks, Historical Studies, vol. 23, pp. 7-38. En Angleterre, la volonté réformatrice impulsée par le réseau des algébristes anglais va marquer le pas à partir du milieu du 19[ème] siècle, après les grandes réformes politiques qui institutionnalisent les transformations issues de la Révolution Industrielle, et avec l'installation du régime victorien.

[74] Formé à Göttingen, qui est alors avec Berlin un des deux grands centres de recherche en Allemagne, Frege présente sa thèse de philosophie à Göttingen et son travail d'habilitation à Iéna, qui portent tous deux sur la géométrie. Professeur de mathématiques à l'université de Iéna, il enseigne la géométrie, et publie plusieurs articles sur ce sujet, y compris pendant sa période logiciste. Belna, Jean-Pierre, 2002, « Frege et la géométrie projective : la *Dissertation inaugurale* de 1873 », *Revue d'histoire des sciences,* 55/3, pp. 379-410.

[75] Frege, G., 1879 ; 1971, « Recherches logiques », *Ecrits logiques et philosophiques,* Paris, Seuil, trad. frçse Cl. Imbert, pp. 170-234.

[76] Frege, G., 1971.

[77] Frege, G., 1971, « Compte-Rendu de *Philosophie der Arithmetik I* de E.G.Husserl », pp. 142-159.

Leopold Kronecker (1823-91) – menacent en effet pour Frege l'unité de la science en la subordonnant tout à la fois aux sensations et aux émotions, c'est-à-dire à l'extrême contingence que constitue à ses yeux la diversité des expériences possibles. Si de telles préventions ne sont pas nouvelles, puisqu'on les rencontre déjà chez William Hamilton ciritquant Whately, elles s'opposent ici à un courant de pensée devenu beaucoup plus prégnant, et renforcé par le dynamisme des sciences expérimentales[78]. Le débat est extrêmement vif, et Frege bat directement le fer avec les tenants des conceptions empiristes. Ses écrits inédits[79] renferment le texte d'une réponse de 1891-92 à Otto Biermann, professeur à l'Ecole Technique Supérieure de Mathématiques de Brünn, et auteur d'une *Theorie der analytischen Funktionen* (1887), à propos du concept d'équinuméricité qu'il a établi en 1884, dans ses *Fondements de l'arithmétique*, pour fonder les nombres cardinaux. Son article « Concept et Objet » de 1892 est une réponse directe aux huit articles de Bruno Kerry – « Privatdozent » en philosophie à l'Université de Strasbourg – parus dans le même journal[80] ; il y réitère son credo sur la nécessité de séparer ce qui relève de la logique et ce qui relève de la psychologie, se démarquer radicalement de toute référence à la « représentation ». Dans ses *Lois fondamentales de l'arithmétique,* Frege se démarque aussi bien de Hankel et de Erdmann que de Pringsheim, qui justifie l'utilisation des signes comme « représentation » sans mentionner le caractère arbitraire de cette conception psychologisante[81].

Le logicisme de Frege ne nie pas l'existence des conditions subjectives et historiques d'élaboration du jugement, mais il n'est concerné que par ce qui fonde la dimension objective de la connaissance, dont il affirme le caractère absolu ee la préexistence. Ainsi, lorsqu'il propose en 1884 sa théorie des nombres cardinaux, il répond à Richard Dedekind (1831-1916) qui considère les nombres une « libre création de l'esprit humain »[82], en récusant la méthode historique en général :

« *La méthode historique a sans doute une vaste juridiction ; elle a aussi ses limites. Si, dans le flux perpétuel qui emporte tout, rien ne demeurait fixe ni ne gardait éternellement son être, le monde cesserait d'être connaissable et tout se perdrait dans la confusion* »[83].

Dans un projet de manuel de logique rédigé entre 1879 et 1891, et longtemps resté inédit, Frege resitue plus largement cette défiance envers la méthode historique dans le cadre de la théorie de l'évolution, et lui oppose son logicisme comme fondement de l'objectivité :

« *A notre époque où la théorie de l'évolution triomphe dans les sciences et où le point de vue historique sur toutes choses menace de transgresser les limites qui lui incombent, on doit se préparer à poser des questions déroutantes. Si l'homme, comme tout être vivant, a évolué de façon continue, les lois de sa pensée ont-elles toujours valu*

---

78 Freuler, Léo, 1995, « Les tendances majeures de la philosophie autour de 1900 », in (dir.) Panza, Marco & Pont, J.-C., 1995, *Les savants et l'épistémologie vers la fin du XIXe siècle,* Paris, Blanchard, pp. 1-15. p. 12.

79 Frege, G., 1969, « Sur le concept de nombre », *Ecrits posthumes,* Paris, Editions Jacqueline Chambon, traduits de l'allemand sous la direction de Ph. de Rouilhan et de Cl. Tiercelin, pp. 91-106.

80 Frege, G., 1971, « Concept et objet », pp. 127-141.

81 Frege, G., 1893-1903, *Grundgesetze der Arithmetik, begriffschrifftlich algeleitet :*(*Lois fondamentales de l'arithmétique*)*,* Iena, Pohle, 2 vols. Rééd. 1998, Hildesheim, Olms, § 72. Traduction Belna, J.P., 2002.

82 Dedekind, J.W.R., 1872, *Stetigkeit une irrationale Zahlen,* Braunschweig, Vieweg. Réimp. : Dedekind, 1932, *Gesallekte mathematische Werke* III, Fricke, R., Noether, E., Ore O. (ed.), Braunschweig, Vieweg, pp. 315-334. Trad. frçse : Dedekind,1979, *Les Nombres : Que sont-ils et à quoi servent-ils ?* Préf. J. T. Desanti, introd. M.-A. Sinaceur, traduction H. Sinaceur et J. Milner,.

83 Frege, G., 1884, *Die Grundlagen der Arithmetik eine logische-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, Koebner. Rééd. 1961, Hildesheim, Olms. 1970, *Les fondements de l'arithmétique,* trad. frçse Cl. Imbert. Paris. Seuil, p. IX.

et continueront-elles toujours à valoir ?..... Il y a là de toute évidence une confusion entre les lois de la pensée effective et celles de l'inférence valide. .....
Le prétendu approfondissement psychologique n'est rien d'autre qu'une falsification psychologique de la logique. Dans le cours naturel de la pensée, le psychologique et le logique se développent en étroite association. La tâche consiste précisément à isoler le purement logique. Il ne s'agit point là de bannir le psychologique de la pensée effective, ce qui serait impossible, mais simplement de prendre conscience du bien fondé logique de ce que nous pensons. Aussi la séparation requise du logique et du psychologique ne consiste-t-elle qu'en leur distinction sciemment opérée »[84].

Méfiant à l'égard du psychologisme, Frege est aveugle et muet quant à la conception opératoire des « lois de la pensée » au sens de Boole, dans la mesure où il redoute les implications de la physiologie des sens[85], et de son matérialisme sous-jacent.

2.2. « Concept » *versus* « représentation »

S'attaquant longuement à la subjectivité des « représentations »[86] – notion assimilée à une image ou un tableau, appartenant au monde intérieur d'un seul individu – il va jusqu'à montrer le caractère circulaire d'une telle conception, en abordant la question de la représentation de lui-même et du siège sur lequel il est assis :

« *Si tout est représentation, il n'y a aucun porteur de représentations. Et j'assiste ici ... à un renversement des propositions en leurs contradictoires. S'il n'y a aucun porteur des représentations, il n'y a non plus aucune représentation ; car les représentations ont besoin d'un porteur sans lequel elles ne peuvent exister. Quand il n'y a pas de monarque, il n'y a pas non plus de sujets ... Je ne suis pas ma propre représentation et si j'affirme quelque chose de moi, par exemple qu'en cet instant je ne ressens aucune douleur, mon jugement concerne quelque chose qui n'est pas un contenu de ma conscience, qui n'est pas ma représentation, mais qui est moi-même* »[87].

C'est à cette subjectivité des représentations que Frege oppose l'objectivité de la pensée et de la vérité, et plus spécifiquement la permanence strictement logique du « concept », qu'il va obtenir en mobilisant un aspect spécifique de la notion de « fonction » en mathématiques. « La » pensée, antérieure à « l'acte de penser », est la condition même d'une communicabilité universelle. Elle n'appartient pour Frege ni au monde intérieur des représentations, ni à celui des choses perçues par les sens :

« *Les pensées ne sont ni des choses du monde extérieur ni des représentations.*
Il faut admettre un troisième domaine. Ce qu'il enferme s'accorde avec les représentations en ce qu'il ne peut pas être perçu par les sens, mais aussi avec les choses en ce qu'il n'a pas besoin d'un porteur dont il serait le contenu de conscience. Telle est par exemple la pensée que nous exprimons dans le théorème de Pythagore, vraie intemporellement, vraie indépendamment du fait que quelqu'un la tienne pour vraie ou non. Elle n'a besoin d'aucun porteur. Elle est vraie non pas depuis l'instant où elle a été découverte, mais comme une planète était déjà en interaction avec d'autres planètes avant qu'on l'ait observée »[88].

---

[84] Frege, G., 1969, « Logique », p. 12-14.
[85] Frege, G., « Recherches logiques », pp. 186-187.
[86] Frege, G., 1971, « Sens et dénotation », p. 105 ; « Compte-rendu… », p. 144-46 ; « Recherches logiques », p. 181-188.
[87] Frege, G., 1971, « Recherches logiques », p. 188.
[88] Frege, G., 1871, « Recherches logiques », p. 184 ; ce qu'il répète p. 192.

C'est en ce sens que Frege est tout aussi sévère avec les idéalistes, dont il conteste la théorie abstractionniste du concept, qu'avec les sceptiques, auxquels il reproche leur refus du réel [89]. S'il évoque rapidement le fait qu'en envisageant « des hommes hors de [lui] », et un monde au delà de son monde intérieur, « [il s]'expose au danger de l'erreur », il persiste à refuser la pensée comme création de l'esprit, et toute possibilité d'intersubjectivité. La pensée existe préalablement à l'activité humaine, indépendamment du temps, et s'offre à l'humain dans un « saisissement » de son esprit, qu'il ne peut préciser davantage qu'à partir d'une métaphore de la vision :

« *Tout n'est pas représentation. Ainsi, je peux donc admettre qu'une pensée est indépendante de moi, et d'autres hommes pourront la saisir aussi bien que moi. Je peux admettre l'existence d'une science à laquelle s'appliquent de nombreux chercheurs. Nous ne sommes pas porteurs des pensées comme nous sommes porteurs de nos représentations. ... Il est vrai que nous ne voyons pas une pensée comme nous voyons une étoile. Aussi est-il recommandé de choisir une expression particulière et le mot « saisir » s'offre à cet office. Un pouvoir spirituel particulier, le pouvoir de penser, doit correspondre à l'acte de saisir la pensée. Penser, ce n'est pas produire les pensées mais les saisir. Ce que j'ai appelé pensée entretient un rapport très étroit avec la vérité. .... Le travail de la science ne consiste pas en une création mais en une découverte de pensées vraies. L'astronome peut employer une vérité mathématique dans l'étude d'événements passés depuis longtemps… Il le peut parce que l'être vrai d'une pensée est indépendant du temps* »[90].

Ce mode de caractérisation de la pensée détermine strictement les caractéristiques du concept selon Frege : il est strictement logique, c'est-à-dire radicalement coupé de toute référence psychologisante, et il n'est surtout pas susceptible de modification, il est déterminé une fois pour toutes. C'est au nom de cette univocité du « concept » – univocité qui manque dramatiquement à la « représentation » – que Frege se détourne délibérément du principe de permanence structuré par Hankel, et qu'il a pourtant utilisé dans ses premiers écrits. En offrant aux mathématiciens la possibilité de fonder l'extension des ensembles numériques – par exemple : des entiers naturels aux entiers relatifs, des entiers relatifs aux rationnels – sur la permanence de propriétés opératoires, ce principe penche du côté de la pensée créatrice d'objets, et s'appuie sur des définitions évolutives des opérations elles-mêmes, que Frege ne peut intégrer à son mode de pensée :

« *Lorsque Hankel, en réponse à la question posée, veut lier l'existence du nombre au sujet pensant, il en fait, semble-t-il, un problème psychologique, ce qu'elle n'est nullement* »[91].

Cette exigence d'absolu, revendiquée à la fois pour « la » pensée et pour « la » vérité, permet de situer le « tournant logiciste »[92] de Frege, à partir de son intérêt pour la géométrie : marqué par la tradition gaussienne, qui envisage la géométrie euclidienne du point de vue de l'empirisme – et l'arithmétique comme purement conceptuelle –, Frege persiste à revendiquer l'intervention de l'intuition en géométrie, sinon dans le raisonnement – de plus en plus analytique – du moins dans ses axiomes. Mais, plutôt qu'à la manière de Kant, Frege envisage plutôt l'intuition dans un registre pédagogique, comme une « capacité à rendre visibles »[93] des entités qui ne le sont pas, comme les

[89] Frege, G., 1971, « Sens et dénotation », p. 107-110. Belan, 2002.
[90] id., pp. 190-191.
[91] Frege, 1893-1903, § 93.
[92] Les spécialistes de Frege déplorent l'absence ou la disparition des documents qui permettraient de dater ce tournant avec précision.
[93] Belna, 2002, p. 386.

complexes dans le champ numérique, ou les points à l'infini de la géométrie projective, voire le « concept de grandeur » auquel il reste attaché. Y compris en géométrie, l'intuition ne concerne pas les fondements de la pensée, elle intervient dans le cadre d'une activité consacrée à la géométrie et à ses modes d'assimilation, qui ne renonce pas pour autant à son ancrage sur ce qui fonde l'absolu de la connaissance. Comme il l'indique dès 1881 :

« *On ne doit tirer de l'intuition aucune raison démonstrative, car c'est un commandement de l'économie scientifique que de ne pas utiliser plus d'expédients qu'il n'est nécessaire. En revanche, il est permis d'utiliser l'intuition comme expédient pour faciliter la fixation des idées* »[94].

Il affirme d'ailleurs dans le même texte que « le langage formulaire mathématique de la géométrie reste encore tout entier à développer » (p. 21), ce qui témoigne du fait qu'il n'a pas alors renoncé à une telle entreprise.

Frege introduit ici la distinction entre l'expression des connaissances, et cet « être vrai »[95] dont il présuppose l'existence. Et c'est pour respecter cet écart entre le « dit » et le « vrai » qu'il sépare également deux phases de l'énonciation, qu'il qualifie d'abord en 1879 de « contenu » et « jugement », avant de mobiliser la notion de fonction mathématique pour fonder, dans les années 1890, sa célèbre distinction entre « sens » et « dénotation ».

2.3. Les articulations logiques de l'analyse conceptuelle

Si l'*Idéographie* de 1879 est une œuvre préparée de manière très autonome, les réponses que Frege rédige à différents comptes-rendus de son travail, lui donne l'occasion de distinguer précisément son projet de celui de Boole, qu'Ernst Schröder (1841-1902) venait de lui préférer[96]. Depuis *Les lois de la pensée* de Boole, les sept volumes des *Mathematische Schriften* de Leibniz ont été publiés de 1849 à 1863, et Frege peut réaffirmer ce qu'il annonçait dès la préface de l'*Idéographie* : si le travail de Boole correspond au projet de *calculus ratiocinator* de Leibniz, le sien est celui de sa *lingua characterista*. Il est hors de question pour Frege d'envisager un calcul logique qui opèrerait indépendamment des contenus. L'*Idéographie* se veut un outil, non pas pour exprimer abstraitement les rapports logiques en empruntant le symbolisme algébrique dans ce qu'il a de plus mécanique, mais pour représenter, et surtout pour analyser, les démonstrations mathématiques, et plus spécifiquement celles de l'arithmétique. Frege veut dégager le raisonnement de la grammaire des langues naturelles, dont la diversité même témoigne de leur imprégnation psychologique. Radicalement hostile au formalisme, il refuse de fonder les mathématiques sur des signes algébriques vides de sens. Il prend l'arithmétique comme exemple le plus avancé sur la voie de la recherche de cette langue caractéristique, tout en refusant de lui emprunter des symboles qu'elle partagerait alors avec l'idéographie, dérogeant à son exigence d'univocité[97] :

« *L'idée que l'arithmétique est le développement de la logique, qu'un fondement rigoureux des lois arithmétiques fait appel à des lois purement logiques et à elles*

---

[94] Frege, G., 1994, « La logique calculatoire de Boole et l'idéographie ». p. 42.
[95] Frege, G., 1971, « Recherches logiques », pp. 170-171, 190-191.
[96] Frege, G., 1971, « Sur le but de l'idéographie », pp. 70-79 ; 1994, « La logique calculatoire de Boole et l'idéographie ». pp. 17-59 ; « Le langage logique formulaire de Boole et mon idéographie », pp. 61-66.
[97] « Cela conduirait à de graves inconvénients, si dans la même formule le même signe se trouvait avec des significations différentes ». Frege, 1994, « La logique calculatoire de Boole et l'idéographie », p. 22..

seulement, semble avoir désormais un nombre croissant de partisans. Tel est aussi mon sentiment, et c'est la raison pour laquelle je demande que le langage des signes arithmétiques soit élargi jusqu'à ce qu'il constitue un symbolisme logique »[98].

Il lui reste donc à débarrasser l'arithmétique de toute intuition, projet qu'il entreprend et développe dans ses ouvrages fondamentaux : l'*Idéographie* (1879), où il explicite son langage formulaire en établissant ce qui correspond à la fois à un calcul des propositions et à un calcul des prédicats ; les *Fondements de l'arithmétique* (1884), où il définit les nombres cardinaux à partir du concept d'équinuméricité ; les *Lois fondamentales de l'arithmétique* (1893-1903), où il y reprend sa langue formulaire à la lumière de sa nouvelle distinction entre « concept » et « extension de concept », et qui est de ce fait considérée comme une seconde Idéographie. Ces travaux occupent une position clé dans l'édification logique des mathématiques, dans la mesure où la « nature » des entiers « naturels » reste la pierre d'achoppement de tous les travaux qui les installent alors comme fondement des autres domaines numériques : entiers relatifs, rationnels, irrationnels, réels, complexes[99]. Les mathématiques se situent sans conteste pour Frege au fondement des sciences, et sa construction des nombres cardinaux et des suites lui permettra d'intégrer y compris le raisonnement inductif à l'édifice logique[100].

Les apports techniques du travail de Frege comparé à celui de Boole ont déjà fait l'objet de nombreuses analyses. Ce qui m'importe ici est de les articuler à la divergence de leurs présupposés quant à la théorie de la connaissance. Chez Frege, le refus du formalisme clôt une vraie question, que Boole n'aborde pas : celle de l'adéquation de la connaissance au monde, que tout empirisme fatalement laisse ouverte. Locke l'éludait en se référant à Dieu, censé avoir doté l'humain des instruments requis pour assurer finalement cette adéquation. Refusant le formalisme, refusant les « représentations », Frege installe la question de la nature et de la formation des contenus conceptuels au cœur de sa problématique. C'est une question dont Boole ne se préoccupait pas, dans l'exacte mesure où il considérait un esprit opérant sur des classes déjà constituées, qui ne faisait que les sélectionner. Cette analyse est soutenue en premier lieu par la distinction frégéenne entre « concept » et « extension de concept », entre « essence » et « existence ». C'est la nature logique du concept qui détermine l'existence possible de ses éléments :

« *La formation des concepts par simple recollection de choses individuelles n'est pourtant qu'une formation très arbitraire .... si ces choses ne sont pas reliées par des caractères communs. Ce sont précisément ceux-ci qui constituent l'essence du concept. .... On peut bien aussi former des concepts, sous lesquels aucune chose individuelle ne tombe, et la connaissance que tel est le cas ne sera peut-être atteinte qu'au terme d'une recherche de longue haleine. Ou encore un concept comme celui de nombre peut comprendre une infinité de choses individuelles. On ne viendrait jamais à bout d'un tel concept par l'addition logique. ....*
Boole suppose comme tout prêts des concepts logiquement parfaits, et donc comme accomplie la partie la plus difficile du travail.....Mais il n'y a de réelle utilité à retirer [d'un calcul logique] que si le contenu n'est pas simplement indiqué, mais construit à partir de ses constituants à l'aide des mêmes signes logiques que ceux utilisés pour le calcul »[101].

---

[98] Frege, G., 1971, « Fonction et concept », p. 89.
[99] Martin Ohm, Hermann Grassmann, Hermann Hankel, Leopold Kronecker, Richard Dedekind, Carl Weierstrass, ont tout particulièrement travaillé sur ce thème.
[100] Dans *l'Idéographie,* Frege fonde l'induction mathématique sur une relation de succession qui sera reprise de manière informelle par Dedekind, et explorée formellement par Russell et A.N. Whitehead (1861-1947) dans les *Principia Mathematica.*
[101] Frege, G., 1994, « La logique calculatoire de Boole et l'idographie », pp. 44-46.

Argument plus essentiel encore : Frege insiste sur l'unité profonde de la logique, et refuse la séparation booléenne entre propositions primaires et propositions secondaires, entre logique des classes et logique des propositions, la jugeant artificielle et mal fondée, puisque se référant au temps. De fait, la logique des propositions lui paraît plus essentielle que la logique des classes, puisqu'il veut fonder le raisonnement déductif, et il récuse l'ordre inverse de la dépendance installée par Boole, quifait passer « l'extension de concept » pour le « concept ».

Ainsi, les ancrages philosophiques de Boole et Frege déterminent une structuration différente de leurs édifices logiques. Reprenant à son compte la méfiance à l'égard de la causalité, que Hume considérait comme indémontrable, comme une habitude, une simple constatation du rapprochement et de la succession de deux événements, la logique booléenne privilégiait, nous l'avons vu, les opérations sur des classes d'objets, correspondant au « et » et au « ou » exclusif de la langue naturelle. Située sur le terrain de la déduction mathématique, la logique frégéenne privilégie d'autres articulations logiques : les symboles primitifs sont ceux de la négation et de l'implication, dont découleront l'expression du « et » et celle du « ou », un « ou » inclusif cette fois, que W. Stanley Jevons (1835-1882) et Schröder ont déjà réintroduit en lieu et place du « ou » exclusif de Boole. Le symbole d'implication de Frege – qu'il appelle le « trait de condition » – correspond à l'implication matérielle pour lequel « si B, alors A » exclut le seul cas « B et non A ». Outre l'économie de signes dont il se targue, ce choix d'un symbole correspondant au « jugement hypothétique » autorise une formulation simple de la théorisation de l'inférence, privilégiant ainsi la situation conditionnelle plutôt que son effectivité. Il prend ses distances par rapport à l'identification entre implication et rapport de causalité, même si Frege en réaffirme l'importance : « Le jugement hypothétique est la forme commune à toutes les lois de la nature, la forme de tous les rapports de causalité »[102].

Mais surtout, Frege introduit en outre un symbole de généralité essentiel à sa volonté d'analyse des concepts, symbole fondateur pour la théorie de la quantification, à partir duquel il définira la symbolisation de l'existentiel. Il est parfaitement conscient de l'importance de cette nouvelle symbolisation pour mener à bien son projet :

« *Même [si le projet originaire de Boole] était en vertu de sa forme plus appropriée qu'il n'est à la reproduction d'un contenu, l'absence d'une représentation de l'universalité correspondant à la mienne rendrait pourtant une véritable formation de concepts impossible* »[103].

Ce langage formulaire, une fois constitué, va permettre à Frege de représenter la déductibilité des vérités arithmétiques. Il établit ainsi que, contrairement à ce qu'en affirmait Kant, les « jugements analytiques » sont susceptibles de produire du nouveau. Il déplace ainsi la notion d'analycité telle que la concevait Kant, puisque devient analytique toute proposition déductible des lois logiques qu'il vient d'expliciter[104]. Il ruine également le recours de Kant la notion de temps comme forme nécessaire de l'intuition pure en construisant logiquement la notion de succession[105], qui servira aussi à représenter le raisonnement inductif.

---

[102] Frege, G., 1971, « Sur le but de l'idéographie », p. 75.
[103] id., p. 46.
[104] Largeault, J., 1980, *Enigmes et controverses,* Paris, Aubier, p. 25-26 ; Coffa, J. A., 1991, *The Semantic Tradition from Kant to Carnap : to the Vienna Station,* Cambridge University Press, ch. 4.
[105] Frege, G., 1999, § 26.

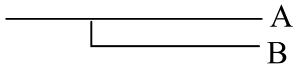
2.4. De la fonction comme support des concepts et des pensées

Si Frege cherche à structurer la logique comme théorie des concepts, il en renouvelle profondément l'agencement, par rapport à la logique traditionnelle, d'abord en le fondant sur le jugement, c'est-à-dire sur la question du « vrai » et du « faux ». A cet effet, il symbolise distinctement, par deux signes différents, « contenu » et « jugement » :

qui énonce : 2 + 3 = 5 — affirme que 2 + 3 = 5 est vrai

qui énonce : 4 + 2 ≠ 7 — affirme que 4 + 2 ≠ 7 est vrai
que 4 + 2 = 7 est faux

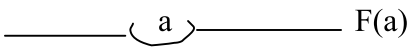
Le signe de l'implication est alors :



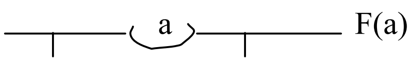
J'enonce : si B alors A
qui exclut le seul cas : (B et non A)

Quant au concept, Frege ne se contente plus de l'assimiler au nom générique qui le désigne dans la langue. Comme en mathématiques, il en exige la caractérisation logique, et affirme l'antériorité logique de cette caractérisation sur l' « extension de concept ». Ces exigences lui sont indispensables pour assurer au concept la stabilité dont il a fait un de ses présupposés fondamentaux.

C'est la notion de fonction, installée au cœur de sa problématique, qui permet à Frege de rompre, plus fondamentalement que ne l'avait fait Boole, avec les articulations traditionnelles de la logique scolastique. En premier lieu, à l'analyse de la proposition en sujet, copule et prédicat, Frege substitue une relation fonctionnelle où sujet et prédicat interviennent comme « variables », terme auquel Frege préfère celui d' « arguments », pour éviter toute référence à la notion de temps[106]. La notion de fonction indique alors une propriété. Elle lui est alors essentielle pour symboliser la généralité comme notation primitive, et pour définir le quantificateur existentiel, non pas à partir de l'existence elle-même, mais directement à partir de la symbolisation précédente :



qui énonce : « La valeur de cette fonction est toujours le vrai, quoi que l'on puisse prendre comme argument »



qui énonce : « Ce n'est pas pour tout argument que la valeur de cette fonctionest le vrai » ou encore « Il y a au moins une valeur de l'argument pour laquelle cette fonction est le vrai »[107].

Plus essentiellement, la relation fonctionnelle permet de fonder logiquement ce que Frege entend par « concept », et de structurer la distinction entre « sens » et « dénotation », qui va ouvrir la voie aux développements autonomes de la logique extensionnelle et de la sémantique.C'est précisément là que se situe le point aveugle de

[106] Frege, G., 1971, « Qu'est-ce-qu'une fonction ? », pp. 161-164.
[107] Ces notations permettent également à Frege de spécifier précisément la portée des quantificateurs.

son travail, puisqu'il investit cette notion de fonction en s'autorisant explicitement de nombreuses extensions, alignées sur les voies de recherche alors développées en mathématiques, mais dont il n'analyse à aucun moment les implications.

La distinction entre « sens » et « dénotation » est élaborée à partir de la remise en cause de la conception kantienne de la relation d'identité entre signes, ce qui va lui permettre de mieux structurer, et de prolonger dans un cadre linguistique, la distinction établie dans son *Idéographie* pour les mathématiques entre « contenu » et « jugement ». En 1892, non seulement il prend soin de ne pas manipuler le signe comme un symbole arbitraire, mais il lui associe, outre l'objet qu'il désigne, et qu'il appelle sa « dénotation »[108] (*Bedeutung*), son mode spécifique de donation, qu'il appelle son « sens » (*Sinn*), qui correspond à un certain savoir sur l'objet. L'exemple « l'étoile du matin = l'étoile du soir » est, dans le texte de Frege, tout à fait paradigmatique de cette distinction. Dans le cas d'un nom propre, sa dénotation n'est autre que l'objet désigné – ici, Vénus –, tandis que son sens réside dans son mode d'appréhension, comme en témoignent les deux membres de cette égalité. La théorisation frégéenne du « concept » et de l' « extension de concept » passe essentiellement par cette distinction, qui va se trouver transférée du nom propre aux termes conceptuels – ceux que Bertrand Russell (1872-1970) appellera les « descriptions définies » – et aux propositions affirmatives, par le biais de la notion de fonction.

Frege profite pleinement du fait qu'au moment où il intervient, une fonction n'est plus seulement une « expression de calcul », elle est devenue un moyen quelconque de faire correspondre, de manière univoque, aux éléments d'un domaine d'objets, les éléments d'un autre domaine d'objets. Comme il l'évoque à propos de la fonction dite « pathologique » de Weierstrass :

« *On alla plus loin, au point d'être contraint d'emprunter au langage parlé quand le langage des signes de l'analyse n'y suffisait pas ; dans le cas par exemple d'une fonction dont la valeur est 1 pour des arguments rationnels, 0 pour des arguments irrationnels* »[109].

Frege ne se prive pourtant pas d'utiliser la fonction comme expression de calcul dans les exemples qu'il produit pour illustrer son propos. La spécificité qu'il va s'autoriser à transférer systématiquement aux termes conceptuels et aux propositions affirmatives, qui caractérise pour lui une fonction, réside dans ce qu'il appelle son incomplétude ou son insaturation. Bien que cette spécificité ne concerne pas seulement les fonctions numériques, c'est sur un tel exemple qu'il la met en évidence, en séparant l'indication du calcul et l'écriture de la variable :

« *On dit que x est l'argument de la fonction et on reconnaît dans*

« $2.1^3 + 1$ »

« $2.4^3 + 4$ »

« $2.5^3 + 5$ »

la même fonction avec des arguments différents, à savoir 1, 4, et 5. D'où il appert que l'essence propre de la fonction réside dans l'élément commun à ces expressions, c'est-à-dire dans ce qui demeure de

« $2.x^3 + x$ »

---

[108] Claude Imbert, dans les *Ecrits logiques et philosophiques,* a traduit *Bedeutung* par « dénotation », et c'est cette traduction que je reprends dans cet article. Les auteurs qui ont traduit les *Ecrits posthumes* ont préféré traduire le terme *Bedeutung* par « signification », plus proche de l'acception de ce terme chez les contemporains de Frege.

[109] Frege, G., 1971, « Fonction et concept » », p. 88.

quand on supprime la lettre « x », ce que l'on pourrait écrire ainsi :

« $2.()^3 +()$ »

....

De la fonction, prise séparément, on dira qu'elle est incomplète, ayant besoin d'une autre chose, ou encore insaturée. C'est par là même que les fonctions se distinguent radicalement des nombres. Si telle est l'essence de la fonction, il est clair qu'on reconnaît la même fonction dans « $2.1^3 +1$ », « $2.2^3 +2$ », bien que ces expressions dénotent des nombres différents... On voit aussi combien la méprise fut aisée, qui situait l'essence de la fonction dans la forme de l'expression »[110].

Partant, Frege distingue le domaine des valeurs de l'argument, et le domaine des valeurs de la fonction. Cette séparation entre l'expression de la fonction et ses valeurs est essentielle à son propos, pour lui permettre de stigmatiser toute confusion entre les signes de nombre et les nombres qu'ils désignent, et qui sont pour lui des objets. Quel que soit le flou qui entoure la notion d'objet[111] chez Frege, et dont la dénotation reste à préciser, l'essentiel de l'objet est d'être un « déjà là », un préalable à la mise en correspondance, sur lequel le chercheur n'a aucun pouvoir de création. Dans le cas d'une fonction numérique, qui sert encore ici d'illustration, les signes dénotent les nombres, et s'il y a bien création dans la production de signes, il n'y en a pas dans le domaine des objets :

« *Une simple expression, la forme destinée à recevoir un contenu, ne peut être l'essence de la chose, seul peut l'être le contenu lui-même. Quel est donc le contenu, la dénotation de "$2.2^3 +2$" ? C'est la même que la dénotation de "18" ou de "3.6" ... La différence des désignations n'est pas une raison suffisante pour qu'il y ait différence des désignés. Ce principe n'a pas la même évidence en arithmétique pour la seule raison que la dénotation du signe numérique 7 n'est rien qui soit perceptible par les sens. Cette tendance, si commune aujourd'hui, à ne pas reconnaître pour objet ce qui n'est pas perçu par les sens, a pour conséquence que l'on prend les signes des nombres pour les nombres eux-mêmes, pour les véritables objets de recherche, auquel cas 7 et 2+5 seraient différents. ...*

Peut-être voudra-t-on y voir une définition. Mais aucune définition n'a le pouvoir créateur de conférer à une chose des propriétés que cette chose n'a jamais eues ; elle donnera tout au plus à une chose la propriété d'exprimer et de désigner ce en place de quoi la définition l'a introduite comme signe »[112].

Cette insaturation fonctionnelle, autour de laquelle s'articule la question du sens dans un énoncé, constitue le point nodal de la pensée frégéenne, qu'il va à la fois répéter à l'envi, et transférer systématiquement dans tous les domaines du langage. Il l'envisage dès 1879 en toute sa généralité dans *l'Idéographie* :

« *Nous exprimons la chose de manière générale en disant : si dans une expression dont il n'est pas nécessaire que le contenu soit celui d'un jugement, un signe simple ou composé a une ou plusieurs occurrences, et si l'on pense que ce signe, en toutes ou en quelques-unes de ses occurrences, peut être remplacé par un autre, pourvu que le signe substitué soit toujours le même, alors la partie stable de l'expression est appelée fonction et la partie soumise à substitution est appelée argument de la fonction* »[113].

---

[110] id., p. 84.
[111] de Rouilhan, Ph., 1988, *Les paradoxes de la représentation,* Paris, Minuit, p. 34.
[112] Frege, G., 1971, « Fonction et concept », p. 82.
[113] Frege-Besson, 1999, § 9.

La première des extensions que s'autorise Frege a lieu dans le domaine des mathématiques, puisque c'est précisément le discours mathématique qu'il cherche à réduire à la logique. C'est en généralisant la notion de « fonction à un argument » à toute « égalité » ou « inégalité » à une variable que Frege définit ce qu'il entend par « concept », et qu'il structure la distinction entre « concept » et « extension de concept ». En effet, toute « égalité » ou « inégalité » – de fait, plutôt toute équation ou inéquation à une inconnue – est vérifiée pour certaines valeurs de l'argument : elle est alors envisagée comme une fonction dont les valeurs sont cette fois « le vrai » et le faux », que Frege appelle donc les « valeurs de vérité » ; ce qui lui permet de définir un « concept » comme « une fonction dont la valeur est toujours une valeur de vérité »[114]. L' « extension de concept » est alors le domaine des valeurs de l'argument pour lesquelles l'égalité ou l'inégalité proposée prend la valeur de vérité « vrai » (*Wahrheitswert*), ce que Frege appelle son « parcours des valeurs » (*Wertverlauf*). Par exemple, « $x^2 = 1$ » définit le concept « racine carrée de 1 » dont l'extension est formée des valeurs qui tombent sous ce concept[115], à savoir (+1) et (–1). Du point de vue linguistique, la valeur de vérité constitue la dénotation, et Frege appelle en général une « pensée » ce qui peut être dit « vrai » ou faux ». C'est sur ce point précis que Frege distingue le discours scientifique d'un roman ou d'un mythe comme l'*Iliade et l'Odyssée* :

« *Veiller à ce qu'aucune expression ne puisse être dépourvue de dénotation, à ce qu'on ne puisse jamais calculer sans y prendre garde sur des signes vides tout en croyant opérer sur des objets, c'est là ce qu'exige la rigueur scientifique. On a fait récemment d'effroyables expériences avec des suites infinies divergentes. ...*
Eu égard aux concepts, il faut exiger que pour tout argument ils aient pour valeur une valeur de vérité, que pour tout objet on puisse dire s'il tombe ou non sous le concept. ..
L'exigence de la délimitation précise des concepts entraîne celle de la délimitation des fonctions en général ; elles doivent avoir une valeur pour tout argument »[116].

La seconde extension de la notion de fonction dont se targue explicitement Frege concerne, dit-il, le domaine des arguments. De fait, il transfère cette fois son analyse de la fonction mathématique au domaine de la langue naturelle. Toute proposition affirmative est envisagée comme « la forme linguistique d'une équation », et son noyau grammatical comme la fonction, en tant que « dénotation de la partie insaturée » ; le (ou les) sujet(s), ainsi que les compléments, jouent le rôle des arguments. Ici encore, le sens de la proposition est une « pensée », susceptible du « vrai » ou du « faux », qui en constitue la dénotation.

Outre les présupposés philosophiques de Frege, c'est bien la généralité de ce qu'il retient sous le terme de « fonction », envisagée comme simple « mise en correspondance », qui sous-tend le nouveau rapprochement entre logique et mathématiques. Il emprunte aux mathématiques les éléments d'analyse qui lui permettent de représenter l'articulation des « concepts » et des « relations »[117] sur le mode démonstratif, et d'en quantifier les domaines de validité en termes généraux. Le système logique qu'il construit profite de l'extension de la notion de fonction qui se met en place en mathématiques à la même époque, et l'absolu de la vérité qu'il présuppose

---

[114] Frege, G., 1971, « Fonction et concept », p. 90.
[115] Cette distinction, que Frege établit ici en toute rigueur, en entraîne plusieurs autres, que Frege établira : celle entre appartenance (lorsqu'un objet tombe sous un concept) et inclusion (lorsqu'un concept est subordonné à un autre concept) ; entre élément (objet) et classe à un élément (extension de concept ne comportant qu'un élément) ; entre une proposition générale et une proposition singulière, seule la première étant susceptible d'apparaître comme une expression insaturée.
[116] Frege, G., 1971, « Fonction et concept », p. 93, 109.
[117] Frege appelle ainsi les concepts à deux arguments. Id ., p. 99.

le dispense de s'interroger sur la validité du transfert de l'édifice ainsi élaboré, du discours mathématique à la langue naturelle.

2. 5. Les limites du logicisme de Frege

Frege n'est pas sans interroger les conditions de ces extensions, de la fonction au concept, et des mathématiques au langage. Son article « Sens et dénotation » est en partie consacré à un tel examen. Mais son propos est plutôt de démasquer les difficultés qui peuvent se présenter pour réduire la langue naturelle, imprégnée comme elle l'est de psychologie, à l'égard de la logique. Et, il en conclut qu'« il ressort de cet examen que [les cas analysés] ne prouvent rien contre notre conception »[118]. Présupposant un monde à « découvrir », son questionnement porte sur les meilleurs moyens d'analyse pour mener à bien cette « découverte », terme dont il qualifie y compris l'élaboration de l'« Analyse supérieure »[119]. Mais ce monde à découvrir reste difficile à cerner.

Comme en témoigne la distinction entre sens et dénotation, Frege installe au cœur de son propos, c'est-à-dire au sein même de la théorie de la connaissance, l'idée d'un écart entre l'objet de la connaissance, et les caractérisations susceptibles d'en être données. Il parle à plusieurs reprises de ce « trésor commun de pensées », que possède l'humanité, et « qui se transmet d'une génération à l'autre »[120], même s'il n'envisage à aucun moment les conditions de cette transmission. Mais il ne confond pas ces pensées, fruits de l'activité humaine, avec « la pensée », premier objet de ses « Recherches Logiques », et à laquelle il confère vertu d'éternité. Il reste suffisamment proche du mode de structuration du discours mathématique pour qu'il lui soit difficile de préciser comment cette pensée s'articule au réel.

Aussi bien dans le discours mathématique que dans la langue naturelle, le sens chez Frege reflète l'état de ce que l'humain est susceptible d'affirmer comme vrai ou faux. Mais cette vérité des propositions s'adresse à un monde d'objets aussi disparates que les choses, les personnes, les nombres, le parcours de valeurs d'une fonction, les extensions de concept, les valeurs de vérité. De fait, Frege ne définit un objet qu'*a contrario* comme « tout ce que n'est pas une fonction », tout ce qui peut intervenir comme argument, toute expression fermée sur elle-même, tout ce qui est saturé :

« *Dès lors que l'on admet tout objet sans restriction comme argument ou valeur d'une fonction, la question est de savoir ce que l'on entend par objet. Une définition dans les règles de l'Ecole est impossible à mon sens, car nous touchons à quelque chose dont la simplicité ne permet pas une analyse logique. On peut seulement dire brièvement ceci : un objet est tout ce qui n'est pas fonction, c'est ce dont l'expression ne comporte aucune place vide* »[121].

Frege affecte la dénotation des concepts et des propositions aux valeurs de vérité, c'est-à-dire au jugement, mais il ne dit rien des conditions d'attribution du « vrai » ou du « faux », comme si elle allait de soi. C'est dans son étude du processus de substitution qu'apparaissent le plus clairement les difficultés inhérentes à sa conception du sens. La relation entre « sens » et « dénotation » s'y trouve simplifiée à l'extrême : son analyse, rejetée à l'extérieur de la logique, est laissée à la philosophie du langage. La possibilité

---

[118] Frege, G., 1971, « Sens et dénotation », p. 125.
[119] Il s'agit de l'analyse mathématique, consacrée spécifiquement à l'étude des fonctions numériques depuis que Cauchy a montré, en 1821, l'impossibilité d'une analyse strictement algébrique pour une telle étude. Frege, G., 1971, « Fonction et concept », p. 81.
[120] Frege, G., 1971, « Sens et dénotation », p. 106 ; « Concept et objet », p. 131.
[121]Id., p. 85, 91, 92.

de substituer une proposition à une autre, ou un concept à un autre, dans un énoncé complexe ou un raisonnement, est essentielle à l'élaboration d'un système déductif. Or, puisque Frege affirme manipuler des signes en se préoccupant de leur contenu, la question du jugement, et donc de la dénotation est pour lui plus fondamentale que la question du sens. Et c'est par rapport à la dénotation, et non par rapport au sens, qu'il envisage cette question de la substitution. Il n'en donne pas de règle explicite, mais, comme dans le cas de la dénotation d'un nom propre, il considère que la substitution d'un terme à un autre, ayant un sens différent, est possible dès lors que la dénotation reste la même :

« *Admettons que la proposition ait une dénotation. Si on y remplace un mot par un autre mot qui a même dénotation, bien qu'ayant un sens différent, ceci ne peut avoir aucune influence sur la dénotation de la proposition ….*
Si nous avons raison de penser que la dénotation d'une phrase affirmative est sa valeur de vérité, celle-ci ne doit pas être modifiée quand on substitue à une partie de phrase une expression de même dénotation, quoique de sens différent. Et il en va bien ainsi… Que pourrait-on trouver, hormis la valeur de vérité, qui appartienne à toute proposition pour laquelle on tient compte de la dénotation des parties constituantes, et qui ne soit pas altéré par une [telle] substitution »[122].

Si la dénotation demeure, le sens se trouve pourtant quelque peu modifié quand, dans la proposition « Napoléon qui reconnut le danger menaçant son flan droit conduisit lui-même ses gardes contre la position ennemie », la subordonnée est remplacée par « qui avait plus de 45 an*s* », même si elle a même valeur de vérité que la précédente. Envisager les propositions obtenues, avant et après la substitution, comme également vraies, évacue la question du rapport de causalité entre la principale et la subordonnée, et ne retient que l'aspect syntaxique de la composition de la proposition comme constitutif de la valeur de vérité. Certes, c'est là une caractéristique majeure que marque la naissance de la logique extensionnelle, mais qui laisse en suspens la question de l'élaboration du sens et de son adéquation au réel.

Autre aspect redoutable du problème de la substitution, de l'intérieur même de l'édifice théorique de Frege cette fois : dans le cas des énoncés mathématiques, en s'autorisant à substituer une fonction à un objet, Frege bute sur une antinomie de type cantorien, alors qu'il espérait précisément échapper à ce risque en élaborant cette structuration systématique de la logique : il obtient une proposition , comme le lui signale Russell dans une lettre du 16 juin 1902, alors que le second volume de ses *Lois fondamentales de l'arithmétique.*

Conclusion

En examinant les travaux de Boole et de Frege dans leurs contextes de travail, il est certes possible d'y reconnaître les éléments du formalisme aujourd'hui central en logique mathématique, ainsi que la présence des articulations fondamentales de la syntaxe et de la sémantique, au moins pour la logique du premier ordre. Ni l'un ni l'autre ne travaillent pourtant dans ce cadre. Et leur conviction qu'il existe une vérité unique et universelle, offerte à la connaissance, soutient la volonté d'absolu de leur démarche analytique. De ce fait, l'aspect aujourd'hui qualifié de syntaxique domine leur propos, puisque c'est dans l'analyse des articulations du discours qu'ils espèrent trouver la garantie de la meilleure adéquation possible entre la connaissance et le monde. Ils se nourrissent l'un et l'autre de la situation des mathématiques au moment précis où ils

[122] Frege, G., 1971, « Sens et dénotation », p. 108-111.

interviennent : une science de plus en plus structurée par des méthodes algébriques, où se pose la question de la pertinence et de la signification des symboles produits, et celles des conditions de l'adéquation au réel du système symbolique ainsi élaboré.

Dans cette seconde moitié du 19ème siècle, aucun d'eux ne peut pourtant faire fi de la part de l'activité humaine dans l'invention en mathématiques, que ce soit du côté des systèmes de nombres, de la symbolisation algébrique, ou de la multiplicité des nouvelles géométries. Ils la cantonnent cependant dans la production de signes, excluant des possibilités humaines toute autre forme de création. Forts de cette restriction, et de leur conception théologique de la vérité, ils peuvent se livrer à une analyse logique approfondie des mathématiques, produisant l'un et l'autre un calcul formel dont les modes de structuration sont fortement marqués par leurs choix philosophiques respectifs.

Chacun à leur manière, Boole et Frege résistent à la montée de l'empirisme, qu'ils perçoivent comme dangereux en raison de la menace de non-communicabilité qu'elle fait peser sur l'humanité. Ils envisagent chacun des solutions alternatives différentes. Boole fait sienne la conception empiriste selon laquelle la connaissance des substances réelles est impossible. Il travaille, dans la lignée des algébristes anglais, à l'élaboration d'un calcul logique symbolique autonome fonctionnant comme méthode générale, et subordonnant toute espèce de signification, que le qualificatif d' « interprétation » marque du sceau du doute. Frege intègre comme fondamentale l'élaboration d'un sens que l'activité scientifique ne retient que si elle en a déterminé la valeur de vérité. Dans les deux cas, l'expérience humaine est subordonnée à un absolu : celui de la méthode pour Boole, celui de la vérité pour Frege. Cette subordination est tout à fait ambivalente : elle est suffisamment sécurisante pour laisser libre cours à cette analyse des conditions de la certitude, mais elle laisse en suspens le processus d'élaboration de la signification. Chacun dans leur cadre, Boole et Frege utilisent pourtant avec beaucoup d'audace des notations mathématiques encore mal stabilisées, contribuant à établir des significations nouvelles : chez Boole, une nouvelle signification du calcul à partir des propriétés opératoires plutôt que des résultats fondée sur la confiance portée à l'activité symbolisante de l'humain ; chez Frege, une nouvelle caractérisation des nombres cardinaux, fondée non plus sur l'acte de compter, mais sur le concept d' « équinuméricité », qui s'exprime aujourd'hui en termes de classes d'équivalence.

Aussi bien Boole que Frege espèrent échapper à la dimension sociale, collective, du langage, que Locke avait pourtant déjà envisagée. L'un et l'autre érigent comme absolu ce qui peut aussi être conçu comme une fonction normative du langage, autorisant efficacité et communication minimale. Ce faisant, ils restent prisonniers de cette conception, si chère à Descartes, d'un sujet épistemologiquement solitaire.

L'impossibilité de sortir des antinomies logiques sans séparer vérité et déductibibilté, comme le montrera Kurt Gödel (1906-78) en 1931, ainsi que la possibilité de subordonner la vérité d'une proposition à sa déductibilité dans un système formel, comme le fera Alfred Tarski (1901-1983) en théorie des modèles, seront des étapes déterminantes pour que mathématiciens et logiciens renoncent à poser le caractère absolu du formalisme et de la vérité comme un *a priori* de leurs édifices théoriques. D'autres facteurs, là encore contextuels, y contribueront également, qui engageront théorie et pratique dans un rapport plus interactif, et où les significations sont élaborées dans la confrontation du discours scientifique au surgissement du réel.