Troisième partie : les voies de l'explicitation.

Chapitre 6. Osgood : le *méta*.

Né à Boston, éduqué à Harvard, William Fogg Osgood (1864-1943) suit les conseils de son aîné Franck Nelson Cole : ce dernier avait obtenu une bourse pour faire son doctorat à Leipzig, auprès de Klein (1885-87) ; Osgood part travailler sous la direction de Klein à Göttingen de 1887 à 1889, puis il termine sa thèse à Erlangen en 1890, sous la direction de Max Noether, sur le sujet relatif aux fonctions abéliennes qu'il avait commencé à travailler à Göttingen. De retour à Harvard il y mène une carrière universitaire classique : assistant professeur en 1893, professeur en 1903 ; très impliqué dans la jeune *American Mathematical Society*, il la préside en 1905-1906, et s'attache à faire connaître les travaux européens – allemands et français – les plus récents lorsqu'il assume la charge de *AMS Colloquium Lecturer* aux colloques de 1898 et 1913.

Marston Morse notait, dans la citation qui ouvre notre introduction, que les termes « *im Kleinen* » et « *im Grossen* » étaient en usage depuis un certain temps ; c'est en fait W.F.Osgood qui commence à les utiliser, y compris dans ses textes en anglais, à la fin des années 1890. Si Morse ne fait pas le lien avec Osgood c'est sans doute qu'il était trop jeune lors des premières conférences d'Osgood (il a six ans en 1898). Peut-être aussi en raison d'un contentieux plus personnel : collègues à Harvard, Morse et Osgood échangent en effet un peu plus que des propos distingués ; en 1932, Osgood épouse Celeste Phelpes, récemment divorcée de Morse. Le scandale conduit Osgood à se retirer de Harvard : il termine sa carrière à l'université de Pékin.

Nous voudrions étudier l'usage des termes *im Kleinen* et *im Grossen* dans quatre textes d'Osgood, textes promis par leur nature même à une large diffusion. Le premier est issu de la série de six conférences intitulée *Selected Topics in the Theory of Functions* [Osgood 1898], données au colloque de l'A.M.S. d'août 1898 ; le second est l'article introductif au volume d'Analyse complexe (II.2) de l'*Encyclopädie*, dont Klein a confié la rédaction à Osgood : *Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen a) einer und b) mehrerer komplexen Größen* ([Osgood 1901]) ; le troisième est le manuel d'analyse complexe rédigé par Osgood, en allemand : *Lehrbuch der Funktionentheorie* (1ère édition 1906, 2ème [Osgoos 1912]) ; enfin une série de conférences au *Madison Colloquium* de 1913 intitulée *Topics in the Theory of Functions of Several Complex Variables* [Osgood 1913]. La période 1898-1914 est aussi pour

Osgood une période de recherche personnelle active, publiée aussi bien aux Etats-Unis que dans les *Mathematische Annalen*, les *Göttinger Nachrichten* ou le *Jahresbericht der D.M.-V.*, sur des sujets variés d'analyse réelle, complexe, ou de topologie. Nous commencerons par une présentation générale du type d'écriture de l'Analyse pratiqué et revendiqué par Osgood, en centrant l'étude sur le *Lehrbuch* : notre auteur se revendique d'une Analyse « moderne » au sens d'ensembliste, et il propose une synthèse de Riemann et Weierstrass, entre les apports de l'Analyse réelle et du langage des surfaces de Riemann. Dans un second temps nous proposerons un relevé des occurrences de *im Kleinen* / *im Grossen* dans ces quatre textes. Une de ces occurrences – la seconde, chronologiquement – consiste en une caractérisation syntaxique des énoncés locaux et globaux, que nous avions présentée dès notre introduction pour l'utiliser comme clé de lecture. Mais cette caractérisation – d'ailleurs donnée en simple note infrapaginale – n'est qu'un élément de tout un réseau qu'Osgood déploie dans cette série de textes pédagogiques. *Im Kleinen* et *im Grossen* qualifient, certes, chacun, des énoncés, mais leur balancement sert aussi à articuler les étapes d'une démonstration, à mettre en perspectives deux énoncés ou deux parties d'un ouvrage ; des séries de théorèmes sont construites – parfois *ad hoc* – pour initier aux problèmes de passage du local au global. Un large répertoire de modes d'écritures du *général transmis par l'exemple*. Si, pour ce que est des fonctions d'une variable complexe et des « surfaces de Riemann », les exposés d'Osgood relèvent encore d'un point de vue très « 19^{e} siècle » bientôt balayé – de droit sinon de fait – par l'exposé de Weyl, l'enrichissement des mathématiques au niveau *méta* par le couple *im Kleinen* / *im Grossen* prend sous sa plume la forme que nous connaissons encore.

I. Une pédagogie ensembliste.

1. « Ensembles » 1900.

Nous entendons ici par « ensembliste » non seulement un mode systématique de référence au lieu, mais un ensemble de notions et de résultats théoriques regroupés sous les appellations de *Mengenlehre* par Osgood lui-même. Ainsi la première partie de son *Lehrbuch* s'intitule-t-elle « *Über die Sätze und Methoden der Theorie der Funktionen reeller Veränderlichen. Mengenlehre.* » ; *Mengenlehre* étant repris comme titre du cinquième chapitre, le dernier de cette première partie. Avant d'examiner ce qu'Osgood met sous ce terme, on peut se faire une idée plus générale de ce qu'on entend par là à l'époque en lisant le rapport que Schönflies fait paraître en 1900 dans le volume 8 du *Jahresbericht der D.M.-V* sur le développement de la théorie des multiplicités ponctuelles (*Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten* [Schönflies 1900] [1]. Les notions y sont regroupées en trois parties : *Allgemeine Theorie der unendlichen Mengen* aborde les questions de cardinal, la distinction entre dénombrable et indénombrable, les autres cardinaux, les questions d'ordre et d'ordinaux. La deuxième partie, *Théorie der Punktmengen*, ne traite plus d'ensembles abstraits, mais des ensembles de points rencontrés en Analyse, nous dirions des parties de $\mathbf{R}^n$: on y trouve des notions de topologie ensembliste (point limite d'un ensemble de points, partie dérivée, ensemble fermé, partie dense, point isolé, ensemble parfait – i.e. fermé et sans point isolé) ; le terme de voisinage (*Umgebung*) n'y est pas défini, et ne sert qu'à introduire les notions fondamentales qui sont, elles, relatives aux suites de points ; la recherche du cardinal d'ensembles de points est une question récurrente ; le problème de la définition générale de la mesure (*Inhalt*) d'un ensemble de points est traité en détail. La troisième partie est consacrée aux applications aux fonctions de variables réelles (*Anwendung auf Funktionen reeller Variablen*) : Schönflies aborde la question en soulignant que pendant longtemps, le domaine (*Wertmenge*) des variables indépendantes d'une fonction a implicitement été un domaine continu, mais que l'étude du concept de fonction générale a conduit à étudier les propriétés de fonctions définies sur un ensemble de point quelconque [Schönflies 1900 115]. Y sont redémontrés les théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues, théorèmes dont Schönflies reconnaît qu'ils ont été pour la première fois systématiquement exposés dans la deuxième édition du traité d'Analyse de Jordan : après avoir défini la notion de fonction continue, Schönflies définit la notion d'ensemble image (par une application éventuellement finiment multivoque) et il établit que l'image par une application continue d'un ensemble fermé (resp. parfait) est fermée (resp. parfaite) ; sont établies de même les propriétés de continuité de la réciproque d'une application continue inversiblement univoque (nous dirions injective), le lien entre continuité et continuité uniforme sur les ensembles parfaits, la caractérisation des fonctions continues par leur comportement sur une partie dense etc. Les notions fondamentales d'analyse réelle, dérivabilité, intégrabilité, propriété de convergence des suites de fonctions, y sont finalement présentées avec tout le raffinement nécessaire à la prise en compte de fonctions générales.

Cet exposé de 1900 n'est que la première partie d'un rapport qui devait porter sur les courbes et les multiplicités ponctuelles (*Curven und Punktmannifgaltigkeiten*), la partie consacrée aux courbes paraissant en 1906, dans le volume 15 sous le titre : *Die Beziehungen der*

[1] Le bref rappel du contexte que nous présentons ici peut être complété par la lecture de l'article de W. Purkert [Purkert 2002] sur le contexte de la *Mengenlehre* de Hausdorff.

Mengenlehre zur Geometrie und Funktionentheorie [Schönflies 1906]. Les propriétés étudiées y sont les propriétés de forme (*Gestaltig*), relevant de l'*Analysis situs*, science des propriétés invariantes par transformations inversiblement univoques et continues. Il existe, écrit Schönflies, trois familles fondamentales de telles propriétés : les propriétés déjà étudiées (point limite, ensemble fermé, parfait), la dimension, la densité. L'invariance de la dimension est « établie » – du moins Schönflies le croît-il – en quelques lignes par un raisonnement reposant sur la notion de cardinal : si on appliquait biunivoquement et bi-continûment la surface d'un carré sur un segment, les segments contenus dans le carré (famille indénombrable) seraient mis en relation biunivoque avec des segments de la droite (famille dénombrable), d'où contradiction [Schönflies 1906 558]. L'essentiel de l'article est consacré à l'exposé des multiples difficultés qui se présentent lorsqu'on veut décrire géométriquement les objets-courbes généraux, engendrés par deux fonctions d'un paramètre réel, fonctions dont on ne suppose que la continuité. De nombreux exemples pathologiques sont rapportés. La fin de l'article fait le lien avec la théorie des fonctions, et fait état de recherches visant à généraliser les résultats fondamentaux de Weierstrass et Mittag-Leffler : c'est à Weierstrass, écrit Schönflies, que nous devons d'avoir appris à distinguer entre *domaine d'existence* d'une *fonction analytique* et *domaine de convergence* d'une *expression analytique* ; la question qui se présente d'abord au Géomètre est de savoir comment se présentent les domaines d'existence et de convergence dans les cas les plus généraux ([Schönflies 1906 571]**)**.

De ce survol très rapide on retient tout d'abord que, si cette théorie des ensembles recouvre des aspects de théorie des ensembles abstraits – problèmes de cardinaux, d'ordre et d'ordinaux –, elle est très largement une théorie abstraite des ensembles de points de $\mathbf{R}^n$. Elle utilise des concepts récents – ensemblistes (dénombrabilité), de topologie ensembliste et de théorie de la mesure – pour étudier dans des situations plus générales les problèmes pour lesquels les mathématiciens des générations précédentes faisaient des hypothèses implicites de régularité, tant des fonctions que des domaines. On trouve un strict écho de cette *image* de la théorie des ensembles [2] dans une note infrapaginale du Traité de d'Analyse de Picard. Dans le chapitre IV du premier tome, Picard définit l'intégrale double, sur un domaine rectangulaire, d'une fonction continue. Il esquisse ensuite la généralisation aux domaines plans limités par une courbe simple C et ajoute en note :

> Pour bien préciser, nous supposons que la courbe C peut être partagée en un nombre fini de parties, telle que chacune d'elles soit déterminée par une équation de la forme

[2] Au sens que Leo Corry donne à ce terme, par opposition au « *body of knowledge* » [Corry 1996].

> $y = f(x)$, $f(x)$ étant une fonction continue de x, n'ayant pas un nombre infini de maxima et de minima. C'est donc le cas *usuel* et élémentaire que nous examinons ici. On pourrait se placer à un point de vue beaucoup plus général ; nous renvoyons pour ces considérations délicates, où la théorie des *ensembles* joue le rôle essentiel, au *Traité d'Analyse* de M. Jordan. [Picard 1991 112]

2. Une Analyse « moderne ».

La compétence et l'intérêt qu'Osgood montre pour ces aspects dans des articles de recherche se retrouvent bien entendu dans ses travaux de synthèse et d'enseignement, mais l'accent y est toutefois différent. Dans l'article de l'*Encyclopädie* [Osgood 1901], plus encore dans le *Lehrbuch* [Osgood 1912], Osgood sélectionne les éléments de cette recherche foisonnante qui sont les plus indispensables au développement rigoureux d'une analyse « moderne » dont il esquisse, un peu en creux il est vrai, une caractérisation. Ainsi la préface à la première édition du *Lehrbuch* présente-t-elle le lien souhaitable entre raffinements de l'Analyse réelle et problèmes spécifiques à l'Analyse complexe :

> On le voit, le calcul infinitésimal ainsi qu'une partie de la théorie des ensembles forment le substrat des développements analytiques. Depuis plusieurs années il ne manque en effet plus rien au traitement rigoureux de cette partie de l'Analyse. Cependant, la théorie des fonctions réelles semble souvent être le but en soi, les définitions et propositions étant poussées plus loin qu'il n'est nécessaire pour la théorie des fonctions complexes, alors que les méthodes doivent découler avant tout des preuves en ε. Ici j'ai avant tout voulu donner un présentation de la théorie des fonctions complexes adaptée à leur première étude et se rattachant directement au calcul infinitésimal. Il me semblait donc pertinent de regrouper dans les chapitres introductifs de ce travail les propositions fondamentales de cette partie de l'Analyse réelle dans leur formulation la plus simple, et d'expliquer en toute clarté les méthodes de démonstration les plus courantes dans l'Analyse moderne. Du reste, le chapitre 5 contient les recherches spécifiques à la théorie des ensembles de points qui sont indispensables pour mettre l'exposé de la théorie à l'abris de toute objection. [Osgood 1912 iii][3]

[3] « *Wie man sieht, bildet die Infinitesimalrechnung nebst einem Teile der Mengenlehre das Substrat für die analytischen Entwicklungen. An strengen Behandlung dieses Teiles der Analysis hat es zwar seit einer Reihe von Jahren nicht gefehlt. Indessen erscheint dabei häufig die reelle Funktionentheorie als selbstzweck, so daß die*

Ce qui nous intéresse dans cette première partie du *Lehrbuch* ce n'est pas tant la liste des résultats, déjà bien classique en 1906, que l'image qu'ils donnent de l'Analyse « moderne », ainsi que les points qu'Osgood présente explicitement comme caractéristiques de cette Analyse. On voit ici l'intérêt qu'il y a à étudier des textes à vocation pédagogique et non seulement des articles de recherche : aucun des résultat n'est de l'auteur, son apport spécifique réside dans leur sélection, leur enchaînement, dans le choix des exemples illustrant tel ou tel point à souligner tout particulièrement, enfin dans le travail aux niveaux *méta* voire *thématique*. Le chapitre I porte donc sur les « concepts fondamentaux du calcul différentiel et intégral » (« *Von den Grundbegriffen der Differential- und Integral-rechnung* ») et forme un couple avec le chapitre 5 de théorie des ensembles, qui clôt cette partie introductive du manuel : le chapitre 5 contient en effet la construction de l'ensemble des réels qui fonde les méthodes employées dès le chapitre 1 pour leur caractère fondamental. Deux points sont mis en avant dès le chapitre 1 : premièrement, il est fait un usage systématique de la méthode des intervalles emboîtés ; deuxièmement, le concept sur lequel repose la théorie des ensembles de points est, avant même celui de limite d'une suite et par contraste avec la présentation de Schönflies, celui de voisinage :

> Définitions. On entend par *voisinage* [*Umgebung, Nähe* oder *Nachbarschaft*] d'un point $x = a$ d'une droite l'intervalle $a-h_1 < x < a+h_2$, où h_1, h_2 sont deux quantités positives. [Osgood 1912 36] [4]

Suit la définition analogue dans le plan, avec la variante donnée par les voisinages en forme de disque et non de rectangles. Une note de bas de page en souligne l'importance :

> Ce concept fondamental pour toute l'Analyse moderne vient de Weierstrass qui, le premier, a reconnu l'importance pour l'Analyse de la théorie des ensemble de points. [Osgood 1912 36][5]

Definitionen und Sätze weiter gefaßt werden, als für die komplexe Funktionentheorie erforderlich ist, während die Methoden erst aus ε-Beweisen herausgelesen werden müssen. Nun habe ich vor allen Dingen eine Darlegung der komplexen Funktionentheorie geben wollen, welche sich auch zum ersten Studium derselben eignet und überdies sich unmittelbar an die Infinitesimalrechnung anschließt. Darum hielt ich es für angebracht, in den einleitenden Kapiteln des Werkes die grundlegenden Sätze jenes Teiles der reellen Analysis in möglichst einfacher Formulierung zusammenzustellen, sowie die gebräuchlichen Beweismethoden der moderne Analysis mit aller Klarheit auseinander zu setzen. Im übrigen enthält Kap. 5 spezielle Untersuchungen über Punktmengen, welche für eine einwandfreie Entwicklung der Theorie unentbehrlich sind. »

[4] « *Definitionen. Unter der* Umgebung, Nähe *oder* Nachbarschaft *eines Punktes* $x = a$ *einer Geraden versteht man das Intervall* $a-h_1<x<a+h_2$, *wo* h_1, h_2 *zwei positive Größen sind.* »

[5] « *Dieser für die ganze moderne Analysis fundamentale Begriff rührt von Weierstrass her, welcher die Bedeutung der Lehre von den Punktmengen für die Analysis überhaupt zuerst erkannt hat.* »

Plus fondamental pour notre étude est le trait souligné dès le premier paragraphe du *Lehrbuch*. Ce paragraphe introductif est consacré au concept de fonction, et nul ne sera surpris par la définition :

> Depuis Dirichlet on dit que $f(x)$ est une *fonction de x* lorsqu'à chaque valeur de x dans un intervalle a ≤ x ≤ b est associée selon une loi déterminée une valeur $f(x)$. [Osgood 1912 1][6]

Osgood donne ensuite une série d'exemples destinée non seulement à illustrer le concept mais aussi à l'élargir progressivement. Dans la série des exemples, deux aspects sont en jeu : le premier, classique, est relatif à la notion de « loi déterminée ». Osgood donne des exemples de fonctions définies par une formule élémentaire, puis par plusieurs formules sur différents sous-intervalles, puis de l'indicatrice des rationnels dans les réels ; le cas de la racine carrée lui permet d'introduire les fonctions multivoques. Le deuxième aspect qu'Osgood fait varier dans la petite série des exemples illustre un point de vue beaucoup plus récent sur le concept de fonction : Osgood montre la variété des domaines possibles. Remarquons qu'il avait introduit le domaine dès la définition, trait qui le distingue de ses prédécesseurs. Le terme d' « intervalle » dans cette définition fait l'objet d'une note infrapaginale :

> Les extrémités a et b peuvent ne pas appartenir à l'intervalle ; du reste, l'intervalle peut s'étendre à l'infini. [Osgood 1912 1][7]

Il poursuit la série des exemples en continuant à ouvrir l'éventail des possibles : le domaine des valeurs (*Bereich der Werte*) que la variable peut prendre peut ne pas former une suite continue : par exemple la fonction $1/x$ est définie dans deux intervalles disjoints ; par exemple, on peut considérer la suite $n!$ comme une fonction définie sur les entiers naturels. Si l'on compare ces exemples élémentaires avec la variété des domaines étudiés dans la *Mengenlehre* à la Schönflies, on peut trouver la moisson bien pauvre ; mais si l'on inscrit cet exposé dans la série des introductions de la notion de fonction, on mesure l'originalité du travail sur le domaine. C'est d'ailleurs sur le rôle du domaine, et non sur la notion problématique de loi déterminée, qu'Osgood choisit de clore ce paragraphe :

> Nous souhaitons encore attirer l'attention sur une différence essentielle entre la façon de voir les fonctions en Analyse élémentaire et dans la théorie moderne des fonctions. Alors que dans la première, nous en avons déjà fait la remarque, on a l'habitude de partir d'une formule pour, après coup, déterminer l'intervalle ou le domaine dans

---

[6] « *Nach Dirichlet heiβt* f(x) *eine* Funktion von x*, wenn jedem einem Intervalle a≤x≤b zugehörigen Werte von* x *ein zweiter Wert f(*x*) nach einem bestimmten Gesetze zugeordnet ist*. »

> lequel la fonction est définie, ici le domaine de définition est placé en tête : tout d'abord vient le domaine [*Spielraum*] des variables indépendantes, ensuite la loi par laquelle les points de ce domaine [*Bereich*] se voient attribués des valeurs. [Osgood 1912 3][8]

Cette remarque concluant l'introduction du concept de fonction se prolonge en une note infrapaginale :

> L'Analyse élémentaire ne manque d'ailleurs pas d'exemples fournissant matière à la conception actuelle. En particulier en calcul différentiel, nombreux sont les problèmes de *maxima* et *minima* issus de la pratique qui conduisent, par eux-mêmes, à considérer d'abord un intervalle déterminé pour le variable indépendante. Ce qui se passe en dehors de cet intervalle ne joue aucun rôle. [Osgood 1912 3][9]

3. Les formes de l'attention au lieu.

Cette attention au domaine comme trait spécifiquement « moderne » se retrouve à tous les niveaux du traité et fournit bien entendu le fond sur lequel une classification *méta* entre propriétés et théorèmes *im Kleinen* et *im Grossen* trouve une place naturelle. Distinguons trois niveaux.

Un premier niveau est celui de l'écriture de l'Analyse réelle élémentaire, pour lequel nous choisissons quelques exemples complétant les séries présentées au chapitre précédent. Dans le petit travail sur les notions de maximum, maximum local et borne supérieure, nous notions, chez Darboux par exemple, une certaine difficulté à exprimer clairement à la fois le rôle du domaine – fermé ou non – et la notion de fonction bornée. C'est au contraire le rôle du domaine qui est mis en avant par Osgood : de la simple hypothèse de continuité d'une fonction sur un intervalle on ne peut conclure, explique Osgood [Osgood 1912 13], qu'elle reste finie (*endlich*) dans cet intervalle, comme le montre l'exemple de $f(\mathrm{x}) = 1/x$ où $0 < x \leq$

---

[7] « *Die Endpunkte a und b brauchen nicht zum Intervalle zu gehören ; im übrigen darf sich das Intervall ins Unendliche erstrecken.* »

[8] « *Auf einen wesentlichen Unterschied der Auffassung der Funktion in der niederen Analysis und in der modernen Funktionentheorie wollen wir doch noch aufmerksam machen. Während man dort, wir vorhin schon bemerkt, gewohnt ist, von einer bestimmten Formel auszugehen und das Intervall bzw. den Bereich, in welchem die Funktion erklärt wird, erst hinterher zu bestimmen, wird hier der Definitionsbereich geradezu an die Spitze gestellt : erst kommt der Spielraum für die unabhängigen Variabeln, dann das Gesetz, wonach den Punkten dieses Bereiches Werte zuerteilt werden.* »

[9] « *Es fehlt allerdings auch nicht an Beispielen aus der niederen Analysis, wo die gegenwärtige Auffassung geboten ist. So führen insbesondere viele aus der Praxis entnommene Aufgaben über Maxima une Minima in der Differentialrechnung schon von selbst dazu, erst ein bestimmtes Intervall für die unabhängigen Variabeln ins Auge zu fassen. Was dann außerhalb dieses Intervalls passiert, ist ja belanglos.* »

1 ; cet exemple sert à introduire la proposition affirmant que les fonctions continues sont finies sur les intervalles fermés (bornés), proposition qui invite ensuite à la distinction entre borne supérieure et maximum. Notons que, si le concept de fonction bornée est clair, un terme spécifique manque encore : le terme de *fini* est repris d'une tradition dans laquelle la fonction $1/x$ prend une valeur infinie en $x = 0$; Osgood condamne l'adjonction implicite de l'infini au système des nombres réels au nom de la science et de la pédagogie [Osgood 1912 6]. La petite difficulté qu'il y a à dire qu'une fonction est bornée dans un domaine se retrouve par exemple dans un article de recherche d'Osgood sur un théorème relatif aux fonctions de deux variables complexes : sur le domaine (T) défini par $|x| < R$ et $|y| < S$, Osgood doit expliciter ainsi l'une des deux hypothèses de son théorème

> $F(x,y)$ doit demeurer finie dans le domaine (T) ; i.e. on doit avoir tout le temps $|F(x,y)| < G$, où G désigne une quantité positive indépendante de x,y et où la paire (x,y) est prise arbitrairement dans le domaine (T). [Osgood 1899 462][10]

Une inventivité pédagogique certaine amène Osgood à intégrer à son manuel des exercices libellés comme suit :

> Problème 2. Critiquer l'expression suivante : « La fonction $f(x)$ est de dérivée finie dans l'intervalle (a,b) ». Prendre comme exemple la fonction
>
> $$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^{3/2}\sin\frac{1}{x},\ x\neq 0 \\ &= 0 \quad x=0 \end{aligned}\right\} x_0 = 0$$ [Osgood 1912 25][11]

Outre la référence systématique au domaine intégrée dans le syntagme « la fonction est [propriété] sur [domaine] », outre un travail pédagogique qui attire l'attention du lecteur sur l'importance du lieu, soit explicitement, soit implicitement en faisant varier cet unique aspect dans une série d'exemples, on retrouve chez Osgood une écriture purement ponctuelle et un rejet aussi bien d'une écriture narrative que de la référence à l'«infinitésimal ». Ainsi la notion de limite d'une fonction en un point intérieur à son domaine de définition est-elle illustrée par un exemple dans lequel la fonction possède une telle limite en l'unique point considéré : $f(x) = x^2$ sur les rationnels, $f(x) = - x^2$ sur les irrationnels, en $x = 0$. Ainsi la notion de croissance ou de décroissance d'une fonction réelle d'une variable réelle, si longtemps évoquée de manière purement narrative, trouve-t-elle chez Osgood une formulation purement ponctuelle ayant le statut d'une vraie définition :

---

[10] « *F(x,y) soll im Bereich (T) endlich bleiben ; d.h. es soll |F(x,y)| < G bleiben, wobei G eine von x,y unabhängige positive Grösse bedeutet und das Werthepaar (x,y) im Bereich (T) beliebig angenommen wird.* »

[11] « *Man kritisiere folgende Ausdruckweise : « Die Funktion f(x) hat im Intervalle (a,b) eine endliche Ableitung. » Als Beispiel nehme man die Funktion* (…) »

> Définition. Une fonction est *monotone*, lorsqu'elle possède la propriété suivante : soient x_1, x_2 deux points quelconques de son domaine de définition tels que $x_1 < x_2$, alors sans exception on a toujours $f(x_1) \leq f(x_2)$, ou toujours $f(x_1) \geq f(x_2)$. [Osgood 1912 27][12]

Cette définition accompagne l'égalité des accroissements finis, dont le lien avec la monotonie est laissé à la sagacité du lecteur.

Un deuxième aspect de cette attention au lieu parcourt tout le *Lehrbuch*, il s'agit de l'attention au *bord*. Ainsi, dès le chapitre de *Mengenlehre*, une notion de *continuum bidimensionnel* est-elle définie : un ensemble de points du plan connexe (par arc) et dont tout point est intérieur ; la définition est suivie de la remarque :

> On nomme *continuum bidimensionnel* un tel ensemble de points. Nous le désignerons souvent dans ce qui suit comme un *domaine T*, mais nous ne pouvons ici nous dispenser d'attirer l'attention du lecteur sur le fait qu'en Mathématiques, lorsqu'il est question d'un domaine, on doit toujours avant tout se prononcer sur la question de savoir si son bord doit être compté avec ou non. Dans le cas d'un continuum, en Analyse, le bord n'est jamais annexé, et il en sera de même pour les domaines T, sauf mention du contraire. [Osgood 1912 151][13]

Le jeu de l'Analyse complexe amène à faire interagir les domaines T avec des domaines S : domaines fermés (i.e. ne s'étendant que dans le fini, et comprenant leur bord) dont le bord est formé d'un nombre fini de courbes régulières (i.e. admettant un paramétrage deux fois dérivable, les deux dérivées secondes ne s'annulant jamais simultanément) [Osgood 1912 151][14]. Les démonstrations peuvent utiliser des approximations des domaines T par des domaines S – dont on utilise soit la compacité, soit une formule intégrale faisant intervenir une intégrale curviligne le long du bord –, parfois par des domaines plus spécifiques comme dans la proposition suivante :

---

[12] « *Definition. Eine Funktion heißt* monoton*, wenn sie, wie folgt, beschaffen ist. Seien x_1,x_2 irgend zwei Punkte des Definitionsbereich und sein $x_1<x_2$. Dann soll ohne Ausnahme $f(x_1)\leqq f(x_2)$ sein oder aber es soll stets $f(x_1)\geqq f(x_2)$ sein.* »

[13] « *Eine derartige Punktmenge nennt man ein* zweidimensionales Kontinuum*. Wir werden es häufig in der Folge als einen* Bereich *T bezeichnen, doch wollen wir an dieser Stelle nicht unterlassen, den Leser darauf aufmerksam zu machen, daß, wenn in der Mathematik von einem Bereich die Rede ist, die Frage stets vor allem entschieden werden muß, ob der Rand mit dazu gerechnet werden soll oder nicht. Im Falle eines Kontinuums wird in der Analysis der Rand niemals einbegriffen, und dies soll in der Folge auch von einem Bereich T gelten, sofern das Gegenteil nicht bemerkt ist.* »

[14] On aura besoin pour comprendre la suite de connaître quelques notations d'Osgood : outre T et S, S_n désigne un domaine S borné par n courbes fermées. Les domaines notés S ou S_n dans le *Lehrbuch* sont notés B et B_n dans l'*Encyclopädie.* Enfin, les notations T, S (ou B), S_n (ou B_n) sont utilisées en italique sous les formes *T, S* (ou *B*), S_n (ou B_n) pour désigner les domaines de chaque type sur une surface de Riemann et non le plan d'une variable complexe.

Proposition fondamentale. Soit un domaine T quelconque. On peut se donner une série de domaines T_0, T_1,… chacun formé d'une réunion de carrés, emboîtés les uns dans les autres, et remplissant exactement T. Dit plus précisément, les domaines partiels possèdent les propriétés suivantes :

a) chaque point intérieur et au bord de T_n se trouve aussi bien dans T que dans T_{n+1}

b) à chaque point P de T correspond une valeur de n pour laquelle P se trouve dans T_n.

[Osgood 1912 156][15]

Ce théorème « fondamental » de topologie plane est qualifié d'« analogue » du développement d'une fonction en série infinie, T_n correspondant à la somme s_n des n premiers termes [Osgood 1912 156]. Un point de vocabulaire supplémentaire est explicité dans *l'Encyclopädie* (où les domaines S du *Lehrbuch* sont appelés domaines B) :

> Par l'expression : *z* est *dans* [in] resp. *à l'intérieur* [innerhalb] de B, T', on doit comprendre que *z* est un point intérieur ou au bord, resp. intérieur à B, T'. [Osgood 1901 10][16]

Un autre aspect de l'attention au bord se manifeste dans la partie consacrée à l'uniformisation. Le chapitre 14 s'ouvre sur la formulation du problème de l'équivalence conforme des domaines simplement connexes ; Osgood signale, avec Riemann, qu'il suffit de montrer que chaque domaine T simplement connexe est conformément équivalent au disque unité d'un plan complexe, puis il distingue immédiatement deux formes de cette demande :

A) que le bord de T consiste en une courbe fermé simple, et que le domaine T bord inclus soit appliqué bi-univoquement et continûment, conformément à l'intérieur, sur le cercle fermé K, ou seulement

B) que l'intérieur de T soit appliqué bi-univoquement et conformément sur l'intérieur de K. [Osgood 1912 681] [17]

On pourrait penser qu'Osgood omet de distinguer entre les domaines relativement compacts – pour lesquels seuls ce résultat est valide – et les autres, mais il n'en est rien : il précise

[15] « *Fundamentalsatz. Sein ein beliebiger Bereich T vorgelegt. Dann läßt sich eine Reihe von Bereichen T_0,T_1…angeben, welche sich einzeln aus Quadraten zusammensetzen, ineinander eingeschachtelt sind, und T genau ausfüllen. Genauer ausgedrückt haben die Teilbereiche folgende Eigenschaften : a) jeder innere und Randpunkt von T_n liegt sowohl in T als in T_{n+1} ; b) jedem Punkte P von T entspricht ein Wert von n, für welche P in T_n liegt.* »

[16] « *Unter dem Ausdruck : z liegt* in *resp.* innerhalb *B, T', soll verstanden werden, dass z ein innerer oder Randpunkt resp. ein innerer Punkt von B, T' ist.* »

[17] « A) *daß der Rand von T aus einer einfachen geschlossenen Kurve bestehe, und daß der Bereich T nebst dem Rande ein-eindeutig und stetig, und im Innern konform auf den abgeschlossenen Kreis K, oder nur B) daß das Innere von T ein-eindeutig und konform auf das Innere von K bezogen werden soll.* »

quelques lignes plus loin qu'il se limite dans un premier temps aux cas « *endlich* ». L'édition de 1912 reprend la démonstration donnée par Koebe du théorème d'uniformisation, et la distinction entre les trois types de domaines simplement connexes non conformément équivalents – disque, plan, sphère – est parfaitement explicite. Notons enfin que cette attention scrupuleuse à la question de la nature et de l'inclusion du bord amène Osgood à critiquer certaines démonstrations de ses prédécesseurs, en particulier la démonstration que Poincaré donnait en 1883 du théorème d'uniformisation des fonctions analytiques [Poincaré 1883a], nous l'avons vu dans la partie consacrée à Poincaré. La deuxième des conférences de 1898 au congrès de l'AMS sur la théorie générale des fonctions porte précisément sur *The representation of multiple valued functions by means of single valued functions of a parameter, treated geometrically by Riemann's methods – Poincaré's theorem*. La reformulation du théorème de Poincaré y est longue et minutieuse :

> *Poincaré's Theorem. Let $y = f(x)$ be any analytic configuration whatsoever. Then it is possible to find two single valued analytic functions of a parameter z such that, if*
>
> $$x = \varphi(z)\,,$$
> $$y = \psi(z)\,,$$
>
> *each value of z pertaining to the domain of definition T of the function $\varphi(z)$ will yield a point (x,y) of the analytic configuration $y = f(x)$ and, conversely, to each point of this analytic configuration will correspond, in general, one or more values of z pertaining to T, two such values of z never becoming coincident. There will be at most three values of x at which some branches of $f(x)$ are analytic and such that any point (x,y) of the configuration in which one of these participate will fail such representation. The domain T will be the interior of the unit circle, or a domain included within that circle. If, in particular, there are at least three values of x which are singular points for all branches of the function, then the analytic configuration $y = f(x)$ is represented adequately by the functions $\varphi(z)$, $\psi(z)$, in that each point (x,y) of the configuration has corresponding to it at least one point z of T, two such values of z never becoming coincident. But even then the neighborhood of a branch point of finite order in the x-surface does not go over into the neighborhood of a point in T.* [Osgood 1898 69]

La conférence d'Osgood consiste en une présentation générale de la notion d'uniformisation, puis en l'exposé de la méthode de démonstration de Poincaré de 1883, avec construction d'une « surface de Riemann » simplement connexe décrite non en couper-coller mais, comme chez Poincaré en 1883, en donnant une convention d'identification des extrémités des chemins continus du plan des *z* issus d'un point quelconque fixé. La présentation de la démonstration de Poincaré se double d'une analyse de cette démonstration, qui conduit à l'énoncé du « *restricted theorem* » que nous venons de citer : le domaine T peut être une partie stricte du disque unité, les points singuliers de *f*(*x*) n'appartiennent pas à la surface de Riemann, la démonstration ne peut dire ce qu'il en est au-dessus des trois points singuliers de la fonction auxiliaire majorante. Une démonstration levant cette dernière contrainte et rendant compte des points singuliers de la configuration au moyen de points au bord du domaine T donnerait un « *ideal theorem* », du type de celui obtenu pour les fonctions algébriques au moyen des fonctions automorphes [Osgood 1898 73]. Pour clore sur les pratiques du lieu qu'on lit dans les démonstrations d'Osgood, sans plus de lien avec la question du bord, signalons qu'on retrouve dans l'*Encyclopädie* et dans le *Lehrbuch*, aussi bien les pratiques du type couper-coller issues d'une tradition riemannienne revisitée par l'école des fonctions automorphes *à la* Klein, que les recouvrements avec empiètement issus des travaux de théorie du potentiel de Neumann (*Verschmelzung*) et Schwarz (procédé alternant, recouvrement en « tuiles » : « *dachziegelartig* » [Osgood 1901 60]).

Le troisième aspect de cette attention au domaine se trouve dans le commentaire d'Osgood sur l'articulation des différentes parties du traité. En particulier, le passage du chapitre 8, consacré aux fonctions multivoques et aux surfaces de Riemann – dans lequel l'objectif explicite est de construire la surface sur laquelle une fonction multivoque devient univoque – au chapitre 9, consacré au prolongement analytique, est présenté comme suit :

> Concept de prolongement analytique. Jusqu'ici, les fonctions *f(z)* dont nous nous occupions étaient considérées dans un domaine donné par avance. Toute la théorie présentée jusqu'à maintenant s'appuie sur des propositions sur des fonctions univoques et analytiques sur le domaine considéré. Pour aller plus loin dans le développement de la théorie, demandons-nous si le domaine initial T ne peut pas être étendu,– si, pour le dire plus précisément, il n'existe pas un domaine *T* englobant T et une fonction analytique dans *T* coïncidant avec *f*(*z*) en tous les points de T [Osgood 1912 429].[18]

[18] « *Begriff der analytischen Fortsetzung. Bisher wurden die Funktionen f(z), mit denen wir uns beschäftigt haben, in einem vorgegebenen Bereich betrachtet. Auf den Sätzen über Funktionen, welche in dem in Betracht kommenden Bereiche eindeutig und analytisch sind, wurde die ganze komplexe Funktionentheorie, soweit wir zur Zeit entwickelt haben, aufgebaut. Indem wir jetzt in dieser Entwicklung weiter gehen, stellen wir die Frage, ob der ursprüngliche Bereich* T *nicht erweitert werden kann,- ob es also, genauer gesagt, nicht einen* T *umfassenden Bereich T nebst eine in T analytischen Funktion gibt, welche letztere in allen dem Bereich* T *angehörigen Punkten von T mit f(z) übereinstimmt.* »

On ne trouve toutefois pas le *thème* de la légalité primitive du lieu, sinon dans un bref passage de l'un des paragraphes de l'*Encyclopädie* consacré aux fonctions automorphes : après avoir introduit les domaines T comme des domaines (à un ou plusieurs feuillets) à bord, dont les courbes bordantes sont associées par paire pour former une surface fermée, Osgood définit les fonctions pour lesquelles un tel domaine est domaine fondamental (*Fundamentalbereich*) ; il souligne :

> Telle qu'elle est développée par l'école de Göttingen, la théorie des fonctions automorphes (II B 6c) repose sur le concept de domaine fondamental comme élément définissant. [Osgood 1901 72][19]

Ni sa position dans l'ouvrage ni sa dépendance envers le contexte immédiat de la théorie des fonctions automorphes, ne permettent de faire de cette remarque l'analogue de la proclamation de Weyl dans la préface de son ouvrage sur les surfaces de Riemann ; le contenu n'en est pas moins le même, d'autant plus qu'en note Osgood cite Klein, qui englobe les travaux de Riemann, y compris ceux sur les équations différentielles linéaires, dans une « école de Göttingen » dont les travaux sont marqués par une commune empreinte géométrique (*geometrisches Gepräge*[20]).

II. *im Kleinen* / *im Grossen* comme couple *méta*.

Dans les quatre textes que nous commentons, Osgood utilise à de nombreuses reprises, y compris dans les textes en anglais, les termes *im Kleinen* et *im Grossen*. Nous proposons un regroupement thématique s'appuyant sur un relevé systématique.

1. Une lecture de théorèmes de Picard.

Dans une note aux Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Emile Picard démontre en 1879 le résultat qu'il présente ainsi :

> Il peut arriver qu'une fonction entière G(z) (nous entendons par là une fonction uniforme et continue dans toute l'étendue du plan) ne puisse, pour aucune valeur finie de z, prendre une certaine valeur finie a. L'expression $e^{f(z)}$, par exemple, où $f(z)$ est entier, ne devient jamais nulle. Considérons donc une fonction entière G(z), ne

[19] « *Der Theorie des automorphen Funktionen (IIB6c), wie sie von der Göttinger Schule entwickelt, liegt der Begriff des Fundamentalbereichs als definierendes Element zu Grunde.* »

[20] Dans la note de Klein suivant l'article de Poincaré : *Sur une classe de fonctions qui se reproduisent par substitutions linéaires*, *MA* **19** (1882), p.553-564. Ici p.564.

> devenant jamais égale à a. Je me propose de montrer dans cette Note qu'il ne peut exister une seconde valeur finie b, différente de a, que ne puisse prendre G(z). (…) Nous allons en effet montrer qu'une fonction G(z), qui ne deviendrait jamais égale à a ni à b, serait nécessairement une constante. [Picard 1879a 1024]

La démonstration procède en deux étapes. Picard redémontre qu'une fonction (univoque) réelle de deux variables réelles est constante si elle est harmonique dans tout le plan réel et bornée. Ensuite, la théorie des fonctions elliptique fournit une fonction ω, analytique sauf en les trois points 0, 1, ∞, et ne prenant que des valeurs de partie imaginaire positive, son logarithme est donc de partie imaginaire bornée. Si la fonction G ne prenait pas les valeurs a et b, la fonction F(z) = $\frac{G(z)-a}{b-a}$ ne prendrait ni la valeur 0 ni la valeur 1, sa composée avec logω donnerait donc, en partie imaginaire, une fonction harmonique dans tout le plan mais bornée, donc constante. L'étape géométrique consiste à établir que la composée de ω et F est univoque alors que ω est multivoque, ce que Picard obtient en rappelant que ω revient à sa valeur initiale par tout chemin fermé n'entourant aucun des points 0,1, ∞, et que les images par F des chemins fermés du plan des z ont bien cette propriété. Dans le tome suivant des mêmes Comptes-Rendus, Picard publie deux théorèmes :

> Je me propose de démontrer maintenant la proposition suivante, dont le théorème précédent n'est qu'un cas particulier : il ne peut y avoir plus d'une valeur finie a pour laquelle l'équation G(z) = a (G(z) étant une fonction entière) ait seulement un nombre limité de racines, à moins que G(z) ne soit un polynôme. [Picard 1879b 662]

Puis,

> On sait que M. Weierstrass, dans son célèbre Mémoire sur les fonctions analytiques uniformes (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1876), partage en deux classes les points singuliers d'une fonction uniforme : ce sont les pôles et les points singuliers essentiels. L'illustre géomètre (…) montre que, dans le voisinage d'un point singulier essentiel A, la fonction s'approche autant que l'on veut de toute valeur donnée, c'est-à-dire que, étant donnés deux nombres ρ et ε aussi petits que l'on voudra, on peut trouver, à l'intérieur du cercle ayant A pour centre et ρ pour rayon, un point pour lequel le module de f(x) – a soit moindre que ε, a étant une constante quelconque. Je me propose de compléter ce dernier théorème en montrant qu'il y a toujours dans le voisinage de A un nombre infini de points pour lesquels f(x) devient *rigoureusement*

> égal à *a*, une exception pouvant se produire seulement pour deux valeurs particulières de *a*. [Picard 1879c 745]

On pourrait considérer cette formulation comme ambiguë : il s'agit d'une infinité de solutions dans chaque voisinage de A et non dans un voisinage de A. Nous désignerons par théorème I celui du volume 88, théorèmes II et III ceux du volume 89. Les deux premiers théorèmes entretiennent le lien de cas particulier à cas général, le troisième entretient un lien avec le théorème de Weierstrass qu'il « complète », mais aucun terme *méta* n'articule les deux premiers au théorème de Weierstrass complété. Pourtant si l'on examine les démonstrations, celle du théorème III n'est qu'une petite variante de celle du théorème II. Les deux démonstrations utilisent la même fonction elliptique modulaire $\nu(\omega)$ (variante de $x(\omega)$ utilisée dans la première démonstration), pour laquelle Picard renvoie à Dedekind (*Journal de Borchardt* t.83). Pour le théorème II, Picard utilise une caractérisation des polynômes tirée de Weierstrass : une fonction entière pour laquelle l'infini est un pôle et non une singularité essentielle est un polynôme, il suffit donc de montrer que l'infini n'est pas une singularité essentielle de G, ou encore que de quelque manière que z tende vers l'infini, $G(z)$ tend aussi vers l'infini. L'argument repose donc sur la conjonction d'une hypothèse globale – la fonction est entière et possède un pôle en l'infini – et d'une caractérisation locale des différents types de points singuliers. Si la fonction entière G n'atteint a et b (disons 0 et 1) qu'un nombre fini de fois, on peut inscrire toutes les solutions des équations $G(z) = 0$ et $G(z) = 1$ dans un disque, dont le complément dans le plan des z sera nommé le domaine de ∞. Il reste à étudier dans ce domaine la composée de G et ω ; l'étude est sensiblement plus complexe que dans le cas du théorème I, car cette composée n'est pas uniforme mais possède un groupe de monodromie monogène dont la structure doit être déterminée. C'est ce type d'étude au voisinage de l'infini qui est adapté dans la démonstration du théorème III, dans le cas où au voisinage du point singulier essentiel A la fonction n'a qu'un nombre fini de pôles : si les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = 1$ n'avaient pas de solution dans tout voisinage de A, on pourrait circonscrire un disque centré sur A dans lequel elle n'en aurait aucun, et le raisonnement utilisé dans la démonstration du théorème II permet de montrer qu'alors la fonction n'a en A qu'un pôle, d'où contradiction. De la démonstration du théorème II on ne retient donc ici que la partie locale. Mais Picard ne commente que la similitude des raisonnement, si grande qu'il peut se contenter de :

> Je suis pour cela la même marche que dans la note citée, où j'ai eu à étudier la forme d'une fonction analogue dans le domaine du point ∞. J'arrive ainsi à établir que le

point A doit nécessairement être pour *f*(x) un pôle ou un point ordinaire. [Picard 1879c 746]

Le cas où la fonction n'a pas de pôle au voisinage de A conduit donc à au plus une seule valeur n'appartenant pas à l'image de tout voisinage ; le cas où tout voisinage contient un pôle conduit, ainsi qu'il est énoncé, à au plus deux valeurs n'appartenant pas à l'image de tout voisinage. Dans l'article des *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* [Picard 1880] contenant le détail de la démonstration des trois théorèmes, ce point n'appelle pas plus de développement.

C'est cette série de théorèmes, plus précisément les théorèmes I et III, qu'Osgood choisit de présenter à l'*AMS* dans la première de ses conférences sur la théorie générale des fonctions (implicitement : d'une variable complexe), conférence qu'il intitule *Picard's Theorem and the Application of Riemann's Geometric Methods in the General Theory of Functions*. Pour ce qui est de la notion de « méthode géométrique de Riemann », on voit dans le texte qu'il s'agit d'un large ensemble de méthodes géométriques, inspirées plus ou moins directement de Riemann et qu'Osgood souhaite faire mieux connaître à ses collègues. On trouve deux « méthodes géométriques » ; premièrement l'analogie entre chemin fermé du plan le long duquel une fonction multivoque revient – ou non – à sa valeur initiale, et chemin fermé – ou ouvert – sur la surface de Riemann de cette fonction, le lien avec la continue déformabilité des chemins ; deuxièmement, Osgood propose d'établir l'existence de la fonction ω par une méthode géométrique plus inspirée de Schwarz que de Riemann : il commence par présenter la figure du pavage du demi-plan supérieur par des triangles de sa géométrie hyperbolique et il montre comment on peut naturellement associer une fonction à ce pavage, en la définissant tout d'abord sur l'un des triangles – en utilisant l'une des fonctions l'appliquant conformément sur le disque unité – puis en prolongeant de proche en proche à tous les triangles du pavage en utilisant le principe de symétrie de Schwarz. Mais ceci nous concerne moins que la nouvelle articulation *méta* qu'Osgood propose entre le théorème I et le III ; rappelons que le théorème I affirme qu'une fonction entière (univoque et analytique pour toute valeur finie de *z*, hypothèse globale donc) non constante prend toutes les valeurs complexes sauf au plus une. Le théorème III est présenté puis énoncé par Osgood comme suit :

We now turn to a more general form of Picard's theorem :

If F(z) is an analytic function of z which in the neighborhood of a point A is single-valued and has in this region no other singularities than poles, and if A is an essential singular point of F(z), then there are at most two values which F(z) does not take on in

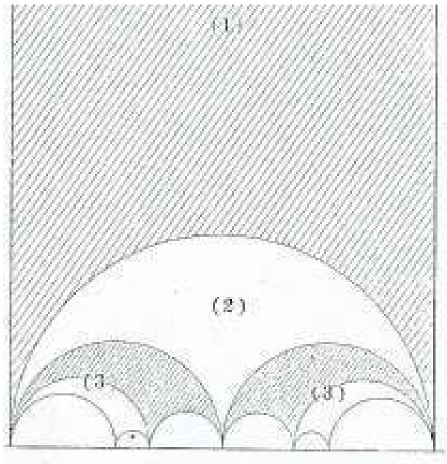
> *every neighborhood of the point A. If there are no poles in the neighborhood of A, there is at most one value that F(z) does not take on in every neighborhood of A.* [Osgood 1898 63]

On remarque que l'alternance de « *in the neighborhood* » et « *in every neighborhood* » lève l'ambiguïté qu'on pouvait lire chez Picard. Bien plus, cet énoncé est immédiatement suivi du commentaire *méta* :

> *This theorem, it will be noticed, is concerned with the behavior of a function* im Kleinen*, i.e. throughout a certain arbitrarily small region ; while the earlier theorem was one* im Grossen*, the domain of the independent variable being there the whole finite region of the plane*. [Osgood 1898 63]

Ainsi ce théorème III qui, chez Picard, n'était pas explicitement articulé aux théorèmes I et II, et ne trouvait sa place dans cette série que parce que sa démonstration est un sous-produit de la démonstration du théorème II, se voit ici doublement articulé au théorème I au niveau *méta* : il est une forme générale du théorème I ; il est un théorème local, l'autre est global. Les deux articulations ne sont bien entendues pas indépendantes : ce deuxième théorème est plus général en ceci qu'il énonce une conclusion de même nature – sur l'ensemble image – pour une variété plus large de domaines – tout voisinage et non le plan. Ces deux articulations ne sont pas non plus triviales : le théorème III n'est pas plus général en ceci qu'il énoncerait exactement la même conclusion sous des hypothèses plus faibles, le théorème III nécessitant l'idée de point singulier essentiel, étrangère au théorème I ; il n'est pas non plus la version locale du théorème I, dont on voit d'ailleurs mal ce qu'elle pourrait être. La remarque d'Osgood sur *im Kleinen / im Grossen* passe par une explicitation assez minimale qui n'a pas l'ambition d'une définition de ces termes. Leur sens précis reste partiellement ouvert : *im Grossen* pourrait qualifier les théorèmes sur les fonctions dont le domaine s'étend à l'infini ; *im Kleinen* concerne ici le comportement sur *tout* voisinage, mais le comportement sur *un* voisinage serait-il aussi qualifié de *im Kleinen* ? Ne s'agit-il que d'insister métaphoriquement sur le fait que le plan c'est *grand* alors que le voisinage, par son arbitraire petitesse, est l'image même du *petit* ? Un auditeur de cette conférence restant un peu perplexe devant ce couple de termes inédits trouve-t-il d'autres occasions d'en préciser le sens ? On retrouve en effet le couple *im Kleinen / im Grossen* quelques pages plus loin sous la plume d'Osgood, toujours dans le texte de la première conférence, dans la partie de la démonstration nécessitant une meilleure compréhension du sous-groupe des automorphismes de la fonction ω engendré par le parcourt d'un circuit fermé dans le domaine de A, un disque épointé donc. Il y parvient en étudiant les points fixes de ces transformations en utilisant la tactique suivante :

For the purposes of the proof of this theorem it will be convenient to generate a new automorphic figure as follows, and subsequently to show that it is identical with the old figure. [Osgood 1898 66]



Osgood part du triangle (1), explique comment engendrer par réflexion le triangle (2) puis les triangles (3) ; il annonce qu'une répétition infinie aboutit à un recouvrement de tout le demi-plan supérieur puis fait remarquer que ce recouvrement est bien un pavage :

> *Notice that, from the manner in which the figure was constructed, there can be no overlapping, not merely from step to step (*im Kleinen*), but after any series of steps (*im Grossen*).* [Osgood 1898 67]

Ici *im Kleinen* / *im Grossen* est encore utilisé en couple *méta*, mais le contexte est sensiblement différent de celui de la première utilisation. Il n'y est pas ici question de « comportement » d'une fonction ; il y a interaction avec le couple général / particulier dans laquelle c'est *im Grossen* qui est du côté du général, puisqu'on passe du non recouvrement partiel après une étape au non recouvrement après un nombre quelconque d'étapes ; le résultat *im Kleinen* concerne bien une partie stricte du plan, mais nullement une partie arbitrairement petite ; cette petite partie est sans lien avec la notion de voisinage d'un point, qu'il s'agisse d'un voisinage ou de tous les voisinages. Si nous assumons une position de lecteur naïf, nous avons des raisons de demeurer perplexe quant à ce couple *im Kleinen / im Grossen*.

2. Une note de l'*Encyclopädie*

Les paragraphes introductifs de l'article, lui-même introductif, qu'Osgood rédige pour le volume d'Analyse complexe de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, exposent dans un style plus relâché que celui du *Lehrbuch* les notions générales conduisant aux fonctions analytiques d'une variable complexe. Osgood ne manque toutefois pas de poser les définitions des domaines T et B (T et S dans le *Lehrbuch*) sans lesquelles les énoncés ne sauraient être corrects. La définition de « voisinage » – par $|z\text{-}a| < h$ – donne lieu à la remarque suivante :

> Le concept de voisinage possède en particulier cette propriété que si h_1 est une valeur de h satisfaisant aux conditions du problème, toute valeur plus petite h_2 ($0<h_2<h_1$) doit aussi y satisfaire. [Osgood 1901 10][21]

C'est ce type de propriété qui sous-tend le passage le plus explicite quant aux termes *im Kleinen* / *im Grossen*, deux pages plus loin. Après avoir posé les éléments de vocabulaire de topologie du plan, Osgood introduit au paragraphe 2 la notion de fonction analytique dans domaine T, qu'il caractérise d'abord par l'existence de la dérivée par rapport à la variable complexe z. Il souligne toutefois que le concept de fonction analytique est encore incomplet et l'on comprend qu'il vise le concept weierstrassien de configuration analytique, dans lequel la fonction est caractérisée à la fois par la propriété locale de dérivabilité complexe et par son domaine maximal d'existence. Il ne s'agit toutefois, dans ce paragraphe 2, que de signaler cette incomplétude, geste *méta* s'il en est :

> Le concept de prolongement analytique manque toutefois à la définition complète de la fonction analytique (§13). On peut en effet dire que la définition donnée jusqu'ici a trait au comportement de la fonction *im Kleinen* (on n'était pas allé plus loin avant Weierstrass) ; il faut encore fixer ce qu'il en est *im Grossen*. [Osgood 1901 12] [22]

Cette phrase est associée à une note infrapaginale :

> Le concept de comportement *im Kleinen* et *im Grossen* d'une fonction joue un rôle important en Analyse, et s'étend à tous les domaines des mathématiques (en particulier à la Géométrie) où un ensemble continu d'éléments forme le substrat des configurations considérées. En théorie des fonctions on entend par comportement *im Kleinen* resp. *im Grossen* d'une fonction son comportement au voisinage d'un point fixé a, (a_1, a_2, …,a_n) ou d'un ensemble de points P (§40) [par souci de brièveté on parle tout simplement de comportement *en* le point a, (a_1, a_2, …,a_n) ou *en* l'ensemble de points P] resp. dans un domaine T, T', *T*, *T'* etc. dont l'étendue est fixée d'avance et non déterminée après coup pour répondre aux besoins du problème considéré. Dans de nombreux cas on peut conclure, d'un certain comportement *im Kleinen* en chaque

---

[21] « *Überhaupt liegt es im Begriff der* Umgebung*, dass, wenn h_1 ein Wert von h ist, der den Anforderungen des Problems entspricht, jeder kleinerer Wert h_2 : $0<h_2<h_1$, denselben auch genügen muss.* »

[22] « *Zur vollständigen Definition der analytischen Funktion gehört noch der Begriff der analytischen Fortsetzung (Nr. 13). Man darf wohl sagen, die bisherige Definition bezieht sich auf des Verhaltens der Funktion*

point d'un domaine T', *T'*, le comportement correspondant *uniforme* (§6) *im Grossen*. [Osgood 1901 12][23]

Cette note, éclairante, fondamentale et un peu contournée dans sa rédaction, appelle bien entendu quelques commentaires. Premièrement, le champ d'utilisation pertinente des termes *im Kleinen* / *im Grossen* dépasse l'Analyse : l'allusion aux ensembles continus renvoie aux bloc des notions de topologie ensembliste, voisinage et limite ainsi que les notions dérivées de domaine, d'adhérence, de partie dense etc. On ne voit toutefois pas nettement comment transposer en Géométrie la notion de « comportement », Osgood ne donne pas d'indication sur ce point. Deuxièmement le local est clairement distingué du ponctuel par Osgood qui souligne le petit abus de langage qui conduit à parler du comportement *en* un point lorsqu'il s'agit du comportement *au voisinage* d'un point. Bien qu'éclairante, cette mise en garde n'épuise pas la question. On pourrait ainsi souhaiter dire que la z-dérivabilité en un point z_0 est une propriété locale en z_0, sans préjuger de la dérivabilité aux points d'un voisinage de z_0. Osgood ne se réserve pas cette possibilité car il construit son paragraphe 2 en définissant d'abord l'analyticité *dans* un domaine T, pour une fonction uniforme et z-dérivable en tout point du domaine T, pour définir ensuite la notion de fonction analytique *en un point* z_0 comme analytique au voisinage de z_0. Troisièmement, et c'est le point fondamental, *im Kleinen* / *im Grossen* renvoie moins à des types de domaines (voisinage, domaine T) qu'aux rôles que des domaines jouent dans des propositions complexes : c'est le jeu du « après coup » / « d'avance » qui caractérise *im Kleinen* / *im Grossen*. Un énoncé est global lorsque sa conclusion porte sur un domaine déclaré dès les hypothèses, il est local si la conclusion porte sur un domaine qu'elle introduit. C'est ce découplage des domaines qui caractérise le local. Si Osgood ne donne pas d'exemple dans cette note, on verra qu'un exemple paradigmatique est donné par les théorèmes d'inversion locale (souvent conforme) : sous certaines hypothèses (portant sur un domaine qui peut bien être le voisinage d'un point) on conclut qu*'il existe* un voisinage du point (dont rien ne permet de penser qu'il s'étend à tout le domaine initial) sur lequel telle propriété est vérifiée … voilà la forme d'un énoncé local. Ce n'est pas l'évocation

im Kleinen *(weiter war man ja vor Weierstrass nicht gekommen) ; es fehlt noch eine Festsetzung bezügl. des Verhaltens der Funktion* im Grossen. »

[23] « *Der Begriff des Verhaltens einer Funktion* im Kleinen *und* im Grossen *spielt in der Analysis einer wichtige Rolle und erstreckt sich auf alle Gebiete der Mathematik (namentlich auch auf die Geometrie), wo eine stetige Menge von Elementen das Substrat für die in Betracht zu ziehenden Gebilde bildet. In der Funktionentheorie versteht man unter dem Verhalten einer Funktion* im Kleinen *resp.* im Grossen *ihr Verhalten in der Umgebung eines festen Punktes a,* (a_1, a_2, …,a_n) *oder einer Punktmenge P (Nr.40) [der Kürze halber spricht man dann schlechtweg von ihrem Verhalten* im *a,* (a_1, a_2, …,a_n) *oder* in *der Punktmenge P] resp. in einem Bereich T,T',*T,T' *u.s.w., dessen Ausdehnung von vornherein feststeht und nicht erst hinterher den Bedürfnissen des vorgelegten Problems entsprechend bestimmt wird. In vielen Fällen folgt aus einem gegebenen Verhalten im Kleinen in jedem Punkt eines Bereiches T'*,T' *das entsprechende* gleichmässig *(Nr.6) Verhalten im Grossen.* »

du « voisinage » par opposition à un « domaine T » qui rend le théorème local : les voisinages sont eux-mêmes des domaines T, les domaines T sont des voisinages de chacun de leurs points, enfin une proposition pourrait porter sur le voisinage d'un point et être globale, dans le cas où la conclusion porterait sur le voisinage fixé initialement. On voit que cette conception du couple *im Kleinen* / *im Grossen* n'est formulable que dans une analyse doublement héritière de Weierstrass : d'une analyse utilisant des concepts de topologie ensembliste bien sûr, mais aussi et peut-être surtout pour ce qui est de *im Kleinen* / *im Grossen*, d'une analyse dont les énoncés utilisent des séries de variables soigneusement quantifiées et dont les relations d'interdépendance sont explicites. La distinction entre énoncés *im Kleinen* / *im Grossen* repose sur le degré de couplage des domaines, traduction en termes de lieu du degré de couplage entre grandeurs quantifiées ; c'est bien ici que se noue le lien avec une notion cousine mais distincte, celle d'*uniforme*. Le paragraphe 6 auquel renvoie la note porte, comme on l'imagine, sur la notion de convergence uniforme et donne comme exemple la convergence des séries entières sur les fermés inclus dans leur disque de convergence. Ce paragraphe ne donne malheureusement pas d'exemple de passage du local au global du type annoncé à la fin de la note. La présence d'un couplage entre lieux et non entre variables quantifiées est aussi marquée, de manière un peu étrange, par le balancement T / T' : les domaines T' sont des domaines B (fermés au bord analytique par morceaux) inclus dans un domaine T fixé ; ce n'est pas leur nature intrinsèque qui distingue les B des T', c'est la dépendance que ces derniers entretiennent avec un autre domaine [Osgood 1901 10]. Nous ne connaissons pas de postérité à cette innovation notationnelle d'Osgood.

Il n'est pas sans intérêt de comparer le texte original d'Osgood avec l'exposé paru dans la version française de l'Encyclopédie en 1911, rédigé d'après Osgood par Jean Chazy et Pierre Boutroux. Comme on le sait, la guerre interrompt cette publication, et nous ne disposons que de la version française des onze premiers paragraphes du texte d'Osgood, qui en compte quarante neuf. Les notions de topologie ensembliste, voisinage, domaines T, B, T' sont reprises telles quelles, mais pas la remarque sur la propriété de stabilité de la notion de voisinage que nous citions au début de cette partie. Le passage fondamental du paragraphe 2, note comprise, est repris avec peu de modifications :

> La notion de prolongement analytique complète la définition de la fonction holomorphe et permet de définir la *fonction analytique* et le domaine d'existence de la fonction analytique. La définition donnée ici se rapporte à l'allure *locale* [note 22] de la fonction.

[note 22] Les notions d'*allure locale* d'une fonction et d'allure d'une fonction *dans tout un domaine*, qui s'opposent, jouent en analyse un rôle important, et s'étendent à tous les domaines des mathématiques dans lesquels les éléments considérés appartiennent à un ensemble parfait, notamment en géométrie et en mécanique. Dans la théorie des fonctions, on entend par *allure locale* d'une fonction l'allure de cette fonction au voisinage d'un point fixe *a* de coordonnées (a_1, a_2, …,a_n) ou d'un ensemble de points P [n°40], et pour abréger, on dit simplement l'allure de la fonction *au* point *a* ou *au* point (a_1, a_2, …,a_n), ou l'allure de la fonction *sur* l'ensemble P. Dans beaucoup de cas, un domaine T étant donné, l'allure locale d'une fonction en tout point d'un domaine T' est *uniforme* [n°6] et l'allure de cette fonction dans tout le domaine T en résulte immédiatement. [Osgood 1911 105]

Le jeu des différences n'est pas ici sans intérêt. On note d'abord l'absence de terme spécifique pour traduire *im Grossen* alors que *im Kleinen* est traduit par local, dont on verra dans la partie consacrée à Hadamard qu'il est déjà d'usage répandu en français. Cette traduction de *im Kleinen* est stable dans tout ce texte : « *Konforme Abbildung im Kleinen* » devient « représentation conforme locale » [Osgood 1911 113], « *das Verhalten einer mehrdeutigen Funktion im Kleinen* » devient « l'étude locale d'une fonction plurivoque au voisinage d'un point critique » [Osgood 1911 127] etc. Plus fondamental, dans la traduction du paragraphe 2, seule la notion d'allure locale est explicitée, et le passage fondamental chez Osgood opposant le global « fixé d'avance » et le local « déterminé après coup » n'est pas repris. Il nous semble que les traducteurs français passent ici à côté de la subtilité de l'explication d'Osgood ou, pour le moins, ne savent pas la rendre : « local » semble renvoyer chez eux à un type de domaine, le voisinage, et non au rôle que le domaine joue dans un énoncé complexe. Ce qui nous semble être une incompréhension peut expliquer une autre petite modification du texte original. La dernière phrase de la note d'Osgood indiquait, pensons-nous, la classe de résultat de passage du local universel (« comportement *im Kleinen* en chaque point ») à l'uniforme sur un compact T', l'uniforme étant lui-même une figure du global ; Chazy, quant à lui, évoque le passage du local universel à l'uniforme de manière un peu maladroite, puis interprète le *im Grossen* comme le passage de T' à T : l'interprétation porte encore sur la nature des objets (un ouvert T, les compacts T' qu'il contient) et non leur fonction dans l'énoncé.

3. Des théorèmes de séparation des branches.

La question de la séparation des branches d'une fonction multivoque d'une variable complexe est de celles que nous suivons depuis Riemann ; on la retrouve bien sûr sous la plume d'Osgood aussi bien dans l'*Encyclopädie* que dans le *Lehrbuch*. La présentation de cette question classique et centrale est toutefois renouvelée chez Osgood par souci pédagogique. Sa volonté, dans le *Lehrbuch*, d'asseoir l'Analyse complexe sur les résultats rigoureux de l'Analyse réelle dans sa formulation la plus récente le conduit à introduire, dès la partie introductive consacrée aux fonctions réelles d'une variable réelle, une série de théorèmes de passage du local au global pour les fonctions multivoques. Après avoir rappelé la notion de fonction multivoque définie sur un intervalle et précisé qu'il se limitait au cas où les ensembles de valeurs prises par la fonction pour chaque valeur déterminée de la variable étaient finis ou dénombrables, il poursuit :

> Dans le traitement d'une fonction multivoque on recommande en général de chercher à la représenter au moyen de fonctions univoques. Pour les fonctions multivoques qui se présentent dans la pratique on y réussit en règle générale au moyen de la proposition suivante :
>
> Proposition 1. Si à chaque point x_0 du domaine de définition T d'une fonction multivoque on associe
>
> a) un voisinage déterminé $|x-x_0| < \delta$
>
> b) une série de fonctions définies et univoques dans ces voisinages
>
> $$y_1 = f_1(x)\ ,\ y_2 = f_2(x),\ \ldots ,\qquad |x-x_0| < \delta$$
>
> telles que les valeurs de ces fonctions entretiennent sur cet intervalle une relation bi-univoque avec les valeurs de ladite fonction multivoque.
>
> Alors un tel regroupement des valeurs de la fonction multivoque est aussi possible *im Grossen*, autrement dit, il existe une série de fonctions univoques définies dans tout le domaine de définition T, dont les valeurs fournissent une et une seule fois le stock de valeurs de la fonction multivoque. [Osgood 1912 44][24]

[24] « *Zur Behandlung einer mehrdeutigen Funktion empfiehlt es sich meist, eine Darstellung derselbe mittelst eindeutiger Funktionen anzustreben. Für die in der Praxis vorkommenden Funktionen gelingt eine solche Darstellung in der Regel vermöge des folgenden Satzes.*
1. Satz. Jeder Stelle x_0 des Definitionsbereiches T einer mehrdeutigen Funktion sollen sich a) eine bestimmte Umgebung $|x-x_0| < \delta$ b) eine Reihe je in derselben ausnahmlos definierter eindeutiger Funktionen $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, … ,$|x-x_0| < \delta$, so zuordnen lassen, daß zwischen diesen Funktionswerten und den Werten der vorgelegten mehrdeutigen Funktion in der gennanten Umgebung eine ein-eindeutig Beziehung statt hat. Dann wird eine ähnliche Zusammenfassung der Werte des mehrdeutigen Funktion auch im Großen möglich sein, deren Werte geradezu den Wertvorrat der mehrdeutigen Funktion einmal, aber auch nur einmal, liefern. »

Autrement dit, si les branches sont en tout point localement séparables alors elles sont aussi globalement séparables. Il est bien entendu prématuré de parler ici de branche, puisqu'aucune hypothèse de continuité, encore moins d'analyticité, n'est faite sur aucune des fonctions en présence : cet étrange théorème est purement ensembliste. La démonstration procède comme suit : on se ramène au cas où l'intervalle T est fini et on suppose dans un premier temps que T est un intervalle fermé $a \leq x \leq b$, de centre x_0, on montre que si la proposition est vraie pour les intervalles de a à x_0 et de x_0 à b, alors elle est vraie de a à b (on notera au passage qu'Osgood omet de montrer la constance du cardinal de l'ensemble des images d'un point, constance qu'il utilise pourtant) ; si la proposition est fausse, elle l'est donc pour l'un des demi-intervalles, on aboutit à une contradiction avec l'hypothèse locale par un argument d'intervalles emboîtés ; si l'intervalle T n'est pas fermé, on l'approche par une suite croissante d'intervalles fermés. Après cette démonstration, le paragraphe se clôt sans autre commentaire sur l'énoncé de deux propositions complémentaires :

> Proposition 2. Si on ajoute aux hypothèses de la proposition 1 les deux hypothèses suivantes :
>
> c) en chaque point de T les valeurs de la fonction multivoque sont toutes différentes les unes des autres ;
>
> d) on peut choisir des fonctions $f_k(x)$ continues.
>
> Alors les fonctions univoques entre lesquelles se partagent, d'après la proposition 1, les valeurs de la fonction multivoque peuvent être déterminées (en fait, à l'ordre près, d'une seule manière) de manière à être continues dans tout l'intervalle elles aussi.
>
> (…)
>
> Proposition 3. Si l'on omet l'hypothèse c) de la proposition 2, la proposition demeure si l'on en omet la parenthèse. . [Osgood 1912 45][25]

Il s'agit bien ici de passer d'une représentation locale à une représentation globale de branches continues, on s'approche donc des préoccupations de la théorie des fonctions complexes tout en demeurant dans un cadre réel. L'hypothèse c) laisse toutefois perplexe, à la fois par sa formulation non ponctuelle et parce qu'on imaginait cette hypothèse déjà contenue dans la notion de « relation bi-univoque avec les valeurs de la fonction multivoque » de la

[25] « 2. Satz. *Zu den Voraussetzungen des 1. Satzes füge man noch die beiden weiteren hinzu : c) in jedem Punkte von T sollen die Werte der mehrdeutigen Funktion sämtlich voneinander verschieden sein ; d) die Funktionen $f_k(x)$ sollen so gewählt werden können, daß sie stetig sind. Dann lassen sich die endeutigen Funktionen, auf die sich nach dem 1. Satze die Werte der mehrdeutigen Funktion verteilen, so bestimmen (und zwar, von der Reihenfolge abgesehen, nur auf eine einzige Weise), daß auch sir im ganzen Intervalle stetig ist. (...) 3. Satz. Wird die Bedingung c) des 2. Satzes gestrichen, so bleibt der Satz bei fortlassung der Klammer immer noch bestehen.* »

première proposition. Elle ne l'était pourtant pas, ce qui explique qu'Osgood n'ait pas, dans la démonstration de la première proposition, cherché à démontrer une constance du cardinal de l'ensemble image d'un point quelconque : il ne suppose pas une telle constance. On peut penser qu'il a en vue des situations proches de celles que présentent en analyse complexe les points de ramification ; on peut en effet imaginer que les courbes réelles au-dessus de l'intervalle se coupent en certains points, faisant varier le cardinal de l'ensemble image. Les systèmes de fonctions univoques dont Osgood montre l'existence pourraient se trouver redondants en certains points, mais il sont non redondants en un sens global, étant des systèmes minimaux de fonctions univoques permettant de redonner toutes les valeurs de la fonction multivoque. On voit que le travail de transposition dans le cadre réel de ces problèmes fondamentaux en Analyse complexe et de reformulation dans le cadre d'une écriture ensembliste de l'Analyse, est délicat même pour Osgood.

Ces trois théorèmes réels ne sont jamais utilisés dans la suite du traité, mais ils trouvent un écho direct dans le chapitre 8, consacré aux fonctions multivoques et aux surfaces de Riemann. Le paragraphe 10 est en effet consacré à la démonstration de la proposition suivante :

> Proposition. Supposons qu'à chaque point intérieur à un domaine simplement connexe T du plan étendu soient associées plusieurs valeurs $f(z)$. Au cas où le nombre de ces valeurs n'est pas fini, qu'il soit dénombrable. On suppose de plus que ces valeurs sont telles qu'il corresponde à chaque point intérieur à T un voisinage déterminé dans lequel tout le stock des valeurs de la fonction puisse être associée à une série de fonctions analytiques univoques. Alors on peut aussi *im Großen*, c'est-à-dire dans tout le domaine T, associer ces valeurs à des fonctions univoques $f_1(z)$, $f_2(z)$,…, chacune analytique dans T, et dont la totalité épuise exactement les valeurs de $f(z)$. . [Osgood 1912 396][26]

La démonstration ne reprend pas le modèle des propositions réelles mais s'appuie sur les éléments de *Mengenlehre* du chapitre 5. Le théorème est d'abord établi sur un domaine T_1' simplement connexe, inclus dans T, limité par une courbe analytique simple : le théorème de Heine-Borel permet d'établir l'existence d'une taille de boule ouverte pour laquelle toute

[26] « *Satz. Jedem inneren Punkt eines einfach zusammenhängenden Bereichs T der erweiterten Ebene mögen mehrere Werte f(z) zugeordnet werden. Im Falle die Anzahl der Werte nicht endlich ist, soll sie jedoch abzählbar sein. Diese Werte sollen so beschaffen sein, daβ jedem inneren Punkte von T eine bestimmte Umgebung entpricht, in welcher sich die ganze Vorrat der Funktionswerte zu einer Reihe eindeutiger analytischer Funktionen zusammenfassen läβt. Dann können besagte Werte auch im Groβen, also im ganzen Bereiche T, zu eindeutigen Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z)$,… zusamenfaβt werden, deren jede sich in T analytisch verhält und deren Gesammtheit die Werte f(z) gerade erschöpft.* »

boule centrée sur un point de T_1' vérifie l'hypothèse locale ; on établit le résultat sur T_1' en l'approchant par des domaines formés de carrés de taille suffisamment petite. Enfin on approche T par des domaines T_1'. La démonstration est suivie d'une remarque sur l'unicité du système des fonctions univoques. Quelques années plus tôt une version légèrement différente de cette dernière proposition était donnée, bien sûr sans démonstration, dans l'article de l'*Encyclopädie*. Sa lecture permet de mettre en perspective et de préciser le sens de la série de propositions du *Lehrbuch*. On ne trouve dans l'*Encyclopädie* que le théorème analytique complexe, et une note de bas de page **[E p.29]** précise qu'il faut considérer que les hypothèses rejettent d'éventuels points de ramification au bord du domaine T : il s'agit donc bien d'un résultat de séparation des branches sous l'hypothèse c). Osgood fait remarquer dans cette note que l'exposé usuel des surfaces de Riemann part de leur description *im Kleinen* aux points de ramification puis procède par prolongement analytique le long de chemins pour la construire dans tout son cours (*Gesamtverlauf*). Il choisit donc de modifier cet ordre de présentation : dans l'*Encyclopädie* comme dans le *Lehrbuch* ce théorème de séparation globale des branches sur les domaines simplement connexes sans point de ramification est donné avant l'étude locale aux points de ramification. La note de l'*Encyclopädie*, enfin, signale que le théorème peut être énoncé sous des hypothèses plus faibles, par exemple en supposant uniquement la continuité *im Kleinen*. C'est ce qui est illustré dans le *Lehrbuch* par la deuxième proposition. Osgood, dans le souci peut-être de souligner le caractère fondamental de ces propositions, allait jusqu'à retirer l'hypothèse de continuité, dans sa proposition 1, quitte à brouiller un peu le sens de la proposition. La série d'énoncés du *Lehrbuch* est donc produite rétroactivement à partir d'un important théorème d'Analyse complexe ; les théorèmes réels ne servent pas à bâtir la théorie, au sens où ils seraient utilisés dans des démonstrations ultérieures, leur fonction relève du niveau *méta* : elle permet d'identifier une certaine *forme d'énoncé*, ici de passage de la séparabilité locale à la séparabilité globale des branches d'une fonction multivoque, en créant pour la proposition d'Analyse complexe du chapitre 8 un contexte propre et inédit, différent du contexte classique qui, par exemple, l'associait étroitement avec la question de la ramification.

4. Représentation conforme et inversion.

Le balancement entre *im Kleinen* et *im Grossen* est particulièrement manifeste dans l'*Encyclopädie* : au paragraphe 5 intitulé « *Die konforme Abbildung im Kleinen* » [Osgood 1901 19] répond le paragraphe 18 « *Die Umkehrfunktion und die konforme Abbildung im*

Grossen » [Osgood 1901 52]. Le *Lehrbuch* reprend ce balancement, en complétant par les démonstrations des théorèmes réels sous-jacents aussi bien aux résultats locaux que globaux. Pour l'aspect local, y sont établis le théorème des fonctions implicites (par la démonstration de Dini), reformulé en théorème d'inversion au voisinage d'un point (sans que le terme *im Kleinen* ne soit utilisé), puis l'interprétation géométrique de l'application linéaire tangente dans le cas de deux variables réelles. La reformulation complexe y est faite avec grand soin ; après rappel du théorème réel, Osgood poursuit :

> Une proposition analogue vaut aussi *im Kleinen* pour les fonctions d'une grandeur complexe.
>
> Proposition. Soit $f(z)$ une fonction de z analytique en un point $z = z_0$, avec $f'(z_0) \neq 0$.
>
> 
>
> Considérons un voisinage T de z_0, $|z-z_0| < h$, dans lequel $f(z)$ est analytique. Pour un choix convenable de h on peut déterminer un voisinage Σ de w_0 dans le plan des w, $|w-w_0| < k$, tel que l'équation $w = f(z)$, où w désigne un point quelconque de Σ, admette dans T une et une seule solution z. La fonction inverse ainsi déterminée $z = \varphi(w)$ est analytique dans Σ et vérifie de plus la relation $\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}$. [Osgood 1912 230][27]

L'interprétation en termes de représentation conforme est ensuite donnée, sans qu'Osgood éprouve le besoin d'aucune métaphore infinitésimale du type « similitude des triangles infiniment petits » ; l'interprétation s'appuie sur les seuls angles entre tangentes aux courbes se coupant en z_0.

La difficulté du passage de l'inversion locale à l'inversion globale est commentée assez longuement dans l'*Encyclopädie* :

> §18. La fonction inverse et l'application conforme *im Grossen*.
>
> Une fonction $w = f(z)$ analytique dans un domaine T définit une application bi-univoque d'un domaine T_1' sur un domaine T_1' d'une surface de Riemann au-dessus du plan des w. Si $f'(z)$ ne s'annule jamais dans T_1', alors l'application du voisinage

---

[27] « *Ein analoger Satz gilt auch im Kleinen für Funktionen einer komplexen Größe. Satz. Sei f(z) eine im Punkte* $z = z_0$ *analytische Funktion von z und sei ferner* $f'(z_0) \neq 0$. *Man betrachte eine Umgebung T von* z_0 : $|z-z_0|<h$, *worin sich f(z) analytisch verhält. Bei geeigneter Wahl von h kann man dann in der w-Ebene eine Umgebung Σ von* w_0 : $|w-w_0|<k$ *so bestimmen, daß die Gleichung w=f(z) wobei w einen beliegbigen Punkt von Σ bedeutet, eine und nur eine in T enthaltene Lösung z zuläßt. Die solchergestalt bestimmte Umkehrfunktion* $z = \varphi(w)$ *ist in Σ analytisch, und es besteht im übrigen die Relation :* $\varphi'(w) = 1/f'(z)$. »

d'un point quelconque z_0 de T$_1$' sur le voisinage du point correspondant w_0 est conforme. Ceci ne suffit pas encore pour conclure que T_1' n'empiète pas sur lui-même, autrement dit que la fonction inverse $z(w)$ est univoque pour les valeurs considérées. Une condition suffisante est donnée par la proposition : si $w = f(z)$ est une fonction de z, continue dans un domaine B$_1$ (n°1) et analytique à l'intérieur de B$_1$, et ne prenant jamais deux fois la même valeur en deux points de la frontière C de B$_1$, alors C est appliquée sur une courbe du plan des w, courbe de Jordan fermée ne se recoupant pas elle-même Γ ; le domaine simple du plan des w limité par Γ est corrélé bi-univoquement et continûment à B$_1$, l'intérieur de ce domaine étant de plus corrélé conformément à l'intérieur de B$_1$. La fonction inverse $z(w)$ est univoque pour les valeurs de w considérées. [Osgood 1901 52] [28]

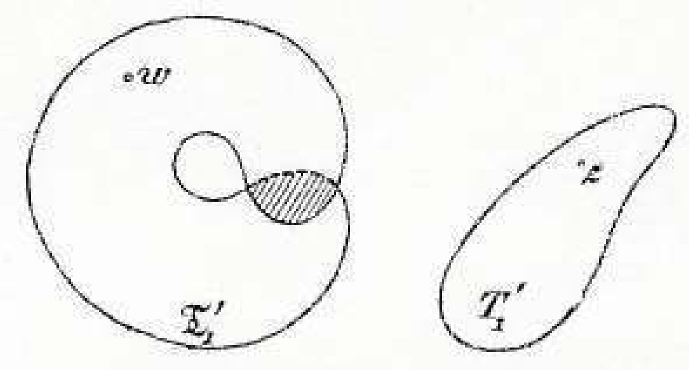


Fig. 3.

Ce même théorème est présenté un peu différemment dans le *Lehrbuch* :

Jusqu'ici nous ne nous sommes en général occupé que de la simple application conforme *im Kleinen*, où nous montrions que sous certaines conditions, le voisinage d'un point z_0, sur l'étendue duquel rien n'est donné d'avance, est corrélé bi-univoquement et conformément au voisinage d'un point w_0. Nous voulons maintenant obtenir un critère pour qu'un domaine fixé au départ puisse être appliqué sur un

[28] « *18. Die Umkehrfunktion und die konforme Abbildung im Grossen. Eine in einem Bereich T analytische Funktion w = f(z) definiert eine ein-eindeutige Abbildung eines Bereiches T_1' auf einen Bereich* T$_1$' *einer über die w-Ebene ausgebreiteten* Riemann*'schen Fläche. Verschwindet f'(z) in T_1' nirgends, so wird die Abbildung der Umgebung eines beliebigen Punktes z_0 von T_1' auf die Umgebung des entsprechenden Punktes w_0 konform sein. Dieser Umstand reicht jedoch nicht zum Schlusse aus, das* T$_1$' *nicht über sich selbst greift, m.a.W. dass die Umkehrfunktion z(w) für die in Betracht kommenden Werte von w eindeutig ist. Eine dazu hinreichende Bedingung gibt der Satz : Ist w = f(z) eine in einem Bereich B_1 (Nr.1) stetige und innerhalb B_1 analytischer Funktion von z, die auf der Begrenzung C von B_1 ein und denselben Wert in zwei verschiedenen Punkten niemals annimmt, so geht C in eine geschlossene sich selbst nicht schneidende* Jordan'*sche Kurve Γ der w-Ebene über ; der von Γ abgegrenzte schlichte Bereich der w-Ebene wird ein-eindeutig und stetig auf B_1, das Innere dieses Bereiches ausserdem noch konform auf das Innere von B_1 bezogen.* »

> deuxième domaine donné au départ, application bi-univoquement et continûment sur les domaines (bords inclus) et conforme à l'intérieur. [Osgood 1912 377][29]

L'accent porte ici moins sur l'erreur qu'il y aurait à conclure directement de l'univoque inversibilité locale à son équivalent global, qu'à un rappel de la caractérisation du couple *im Kleinen / im Grossen* par le « domaine donné d'avance » ou non. On trouve bien sûr dans le *Lehrbuch* la démonstration du théorème. La partie principale est en fait le théorème purement topologique de Jordan, démontré longuement dans le chapitre de *Mengenlehre* :

> Proposition principale. Une courbe fermée simple partage le plan en deux *continuum*, l'un demeurant dans le fini, l'autre s'étendant à l'infini. La courbe est la frontière complète de chacun des deux domaines. [Osgood 1912 171][30]

L'injectivité dans tout le domaine limité par cette courbe est ensuite obtenue bien classiquement en dénombrant les antécédents par l'intégrale curviligne de la dérivée logarithmique.

Pour saisir la signification de ce théorème dans l'exposé d'Osgood, on doit distinguer deux niveaux de contexte. Le contexte immédiat et technique est le suivant : le théorème est énoncé dans le chapitre du *Lehrbuch* consacré aux surfaces de Riemann et après une série d'exemples de constructions de surfaces de Riemann de fonctions de plus en plus complexes. Ce théorème vient à la fois légitimer les procédés exposés dans des cas particuliers et amorcer un exposé plus général : il sert à garantir que le procédé de formation des surfaces de Riemann par découpage puis recollement des feuillets le long de leur bord conduit à une application bijective, continue et conforme des morceaux de la surface au-dessus du plan des z sur des morceaux du plan des w. Au delà du contexte technique, on peut distinguer plusieurs éléments de contexte *méta*. Le balancement très souligné, jusque dans les titres des paragraphes, entre théorème *im Kleinen* et *im Großen*, enrichit la signification de ces termes : après un exemple de passage non trivial d'un théorème global à un théorème (non strictement analogue, toutefois) local dans le cas des théorèmes de Picard, et la série des théorèmes de séparation des branches sur les domaines simplement connexes, illustrant une *forme de théorème* de passage du local au global, on a ici le passage non trivial d'un théorème local à sa contrepartie globale. Dans l'*Encyclopädie*, ce contexte *méta* s'enrichit d'un élément qui accédera chez

[29] « *Bisher haben wir uns im allegemein Falle bloß mit der konformen Abbildung im Kleinen beschäftigt, indem wir zeigten, daß unter gewissen Bedingungen die Umgebung eines Punktes z_0, deren Ausdehnung also von vornherein nicht feststand, ein-eindeutig und konform auf eine Umgebung eines Punktes w_0 bezogen wird. Jetzt wollen wir ein Kriterium kennen lernen, wonach ein vorgelegter Bereich inkl. Der Berandung ein-eindeutig und stetig, und im Innern konform auf einen zweiten vorgegebenen Bereich abgebildet werden kann*. »

Hadamard au niveau *thématique*, avec l'identification d'une *forme d'erreur* : le passage abusif du local au global. Le paragraphe 18, dont nous présentions plus haut les premières lignes, s'accompagne en effet d'une note développant ce point. Deux exemples d'erreur de ce type y sont citées. Premièrement, un traitement trop rapide de l'inversion des intégrales elliptiques de première espèce chez Briot et Bouquet [Briot, Bouquet 1859 73] : ces auteurs affirment la monodromie de la fonction $u(z)$ définie par la relation $z=\int_O^u \frac{du}{\sqrt{P(u)}}$ lorsque P est un polynôme de degré 3 ou 4, mais ils se bornent à une étude au voisinages d'éventuels points singuliers. Pour le deuxième exemple, Osgood renvoie aux *Neue Beiträge zur* Riemann'*schen Funktionentheorie* de Klein [Klein 1883], dans lesquelles ce dernier rappelle l'origine de ces recherches dans des travaux de Fuchs ne fournissant toutefois qu'une idée imprécise ; une note précise ce point :

> Je qualifie dans le texte ces développements d'« idée vague » car ces résultats, bien qu'énoncés par M. Fuchs de manière parfaitement précise, sont faux pris tels quels. Partout se présente la confusion entre fonction *non ramifiée* et fonction *univoque*. [Klein 1883 214] [31]

Klein et Osgood parlent bien de la même erreur technique : la non ramification de la fonction équivaut à son univoque inversibilité locale mais non globale ; le couple *im Kleinen / im Großen* n'est toutefois pas celui qu'utilise Klein. On ne peut non plus manquer de voir que la figure qui accompagne le passage de l'*Encyclopädie* dans lequel Osgood présente cette forme d'erreur est la figure que Poincaré envoie à Fuchs pour lui présenter l'insuffisance de ses arguments. Ce contexte spécifique peut peut-être expliquer la présence de *im Kleinen / im Großen* dans la première des conférences devant l'*AMS* sur la théories des fonctions : nous nous étions étonné de l'usage de ce couple pour décrire le non recouvrement après une / après un nombre quelconque d'étapes du pavage du demi-plan engendré par inversion autour des côtés d'un triangle en arcs de cercles ; cet engendrement sans recouvrement est justement ce qui établit l'univocité du paramétrage proposé par Fuchs. Inversion locale/globale et questions de recouvrement de l'image par elle-même ne sont ici que des formulations différentes d'un même problème.

---

[30] « *Hauptsatz. Eine einfach geschlossene reguläre Kurve teilt die Ebene in zwei Kontinuen, wovon das eine im Endlichen liegt, während sich das andere ins Unendliche erstreckt. Die Kurve bildet die volle Begrenzung eines jeden der beiden Bereiche.* »

[31] « *Ich bezeichne diese Entwicklungen im Texte als « unbestimmte Ideen », weil die Resultate, die Herr Fuchs allerdings in sehr bestimmter Form ausspricht, als solche unrichtig sind. Es liegt überall die Verwechselung der* unverzweigten *und den* eindeutigen *Funktionen vor.* »

Un point encore : lorsqu'il présente son théorème d'inversion *im Großen*, aussi bien dans le *Lehrbuch* que dans l'*Encyclopädie*, Osgood dit qu'on le trouve chez Darboux, dans le premier volume de ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal* de 1887. Bien sûr, on ne trouve dans ce passage de Darboux auquel Osgood renvoie nulle allusion au couple local/global, mais les différences ne se situent pas essentiellement au niveau *méta* : ni la famille de problèmes étudiée par Darboux ni les démonstrations qu'il donne ne rappellent le théorème donné par Osgood ! Dans ce chapitre consacré à la « Représentation conforme des aires planes », Darboux énonce en effet le problème de l'équivalence conforme des domaines simplement connexes – se limitant implicitement, comme Riemann, aux domaines plans bordés par des morceaux de courbes analytiques –, rappelle brièvement le rôle de Riemann, puis présente assez longuement les résultats obtenus par Schwarz sur ces questions, en partant du principe de symétrie. Dans ce que présente Darboux les deux aires planes sont donc fixées, l'une étant d'ailleurs le demi-plan supérieur (K), et on cherche une application bi-univoque et conforme, alors que dans le théorème d'Osgood la deuxième est image de la première par une application donnée. Le lien entre Osgood et Darboux tient ici plus à la façon de poser le problème et aux figures qui y sont associées. Darboux formule en effet le problème de l'équivalence conforme en mettant l'accent sur la bijectivité :

> Etant données deux aires planes (A), (A_1), déterminer la fonction Z = $f(z)$ qui permet d'effectuer une représentation conforme de l'une des aires sur l'autre, de telle manière qu'à un point, pris dans l'intérieur de l'une quelconque des deux aires, corresponde un seul point pris dans l'intérieur de l'autre, et qu'aux points pris sur le contour de l'une des aires correspondent les points pris sur le contour de l'autre. [Darboux 1887 170]

Dans l'analyse du problème, Darboux est conduit à la condition nécessaire suivante :

> La dérivée $f'(z)$ ne peut s'annuler pour aucun point z_0 compris dans l'intérieur de l'autre (K) ; car, si la dérivée s'annulait pour $z = z_0$, il y aurait, dans le voisinage du point z_0, au moins deux points z pour lesquels la fonction Z aurait la même valeur, et, par conséquent, à un point de l'aire (A) correspondraient plusieurs points de l'aire (K), ce qui est contraire à l'hypothèse. [Darboux 1887 173].

Condition accompagnée de la figure :

5. Autres occurrences.

Dans le chapitre 13 du *Lehrbuch*, consacré aux fonctions harmoniques de deux variables réelles, Osgood présente au paragraphe 6 le principe de symétrie de Schwarz et passe progressivement à des problèmes plus globaux. L'enchaînement des propositions est le suivant : prolongement harmonique au delà d'une frontière rectiligne sur laquelle la fonction s'annule ; prolongement harmonique au delà d'une frontière rectiligne sur laquelle la fonction est harmonique (après définition de cette notion d'harmonicité le long d'un segment) ; après avoir défini la notion de courbe analytique, Osgood souhaite passer à la proposition :

> Proposition 3. Soit *u* une fonction harmonique dans un domaine S dont la frontière est en partie formée d'une courbe analytique C, et si *u* est de plus analytique sur C, alors *u* admet un prolongement harmonique au delà de C. [Osgood 1912 669] [32]

Cette proposition repose sur un résultat de redressement global des courbes analytiques :

> Proposition 4. Soit C une courbe analytique. Alors le voisinage de C peut être corrélé bi-univoquement et conformément au voisinage d'un segment droit Γ, de sorte que C vienne en Γ. [Osgood 1912 669][33]

Osgood commence par montrer en quelques lignes qu'un tel redressement est possible au voisinage de chaque point de la courbe. Le passage au global est introduit par :

> On a donc obtenu *im Kleinen* pour le voisinage du point (x_0,y_0) ce que la proposition demande *im Großen* pour toute la courbe C. [Osgood 1912 670][34]

La compacité de la courbe rend la démonstration aisée ; Osgood prend soin de montrer que le voisinage obtenu en mettant bout à bout des disques peut être pris suffisamment fin pour qu'aucun empiètement ne remette en question la bijectivité souhaitée.

La deuxième des conférences de 1898 ainsi que le chapitre 14 du *Lehrbuch* sont consacrés à l'uniformisation, en 1898 pour exposer les critiques à la démonstrations de Poincaré de 1883, en 1912 (2ème édition du *Lehrbuch*) pour présenter la solution de Koebe. C'est la façon de présenter le problème qui nous intéresse ici. Ce problème de l'uniformisation des fonctions algébriques puis analytiques quelconques nous a servi de paradigme de problème global, mais

[32] « *3.Satz. Verhält sich u in einem Bereiche S, dessen Begrenzung zum Teil aus einer analytischen Kurve C besteht, harmonisch, und nimmt ferner längs C analytische Randwerte an, so läßt sich u über C hinaus harmonisch fortsetzen.* »

[33] « *4. Satz. Sei C eine analytische Kurve. Dann läßt sich die Umgebung von C auf die Umgebung einer geraden Strecke Γ ein-eindeutig und konform beziehen, dergestalt daß die Kurve C in die Strecke Γ übergeht.* »

[34] « *Hiermit ist im Kleinen für die Umgebung des Punktes* (x_0,y_0) *das erreicht, was der Satz im Großen für die ganze Kurve C verlangt.* »

il n'était pas décrit comme tel par les auteurs que nous lisions jusqu'ici. Osgood, au contraire, en fait ressortir l'aspect global au moyen de deux procédés. Premièrement :

> Lorsque l'on est confronté à une fonction multivoque il est généralement recommandé de la représenter par des fonctions univoques. Par exemple la surface de Riemann sert avant tout à fournir un domaine dans lequel une fonction multivoque donnée devient univoque. Un autre cas est traité au chapitre 8, §14, où une fonction analytique $w = f(z)$ a un point de ramification d'ordre fini en $z = a$. On parvenait alors à représenter l'élément d'une paire de valeurs (w,z) de la fonction au moyen de deux fonctions univoques d'un paramètre t : $z = a + t^m$, $w = \varphi(t)$. Mais cette représentation n'était valide qu'*im Kleinen*, donc pour une partie restreinte du domaine de définition de la fonction. Au contraire, le calcul intégral nous fait connaître certaines classes de fonctions permettant de représenter la fonction dans tout son cours [*Gesamtverlauf*] au moyen de fonctions univoques, – de les *uniformiser*, comme on dit couramment. [Osgood 1912 370][35]

L'uniformisation globale est donc opposée à la fois à l'uniformisation locale – d'ailleurs uniquement aux points de ramification : aux points ordinaires le paramètre z est l'uniformisante locale, mais cette évidence ne deviendra pertinente que dans une présentation plus abstraite de la notion de surface de Riemann telle que celle de Weyl – et à l'uniformisation sur la surface de Riemann. Le deuxième procédé utilisé par Osgood pour faire sentir la spécificité de l'uniformisation globale se manifeste dans la série des exemples élémentaires dont nous citons ici la fin :

> *2. A further example is furnished by the unicursal curves $x = \varphi(z)$, $y = \psi(z)$, where $\varphi(z)$, $\psi(z)$ are rational functions of z, and $z = R(x,y)$. In each of the above cases, to each value of z (T consisting of the whole plane with the exception of a finite number of points) corresponds in general a point (x,y) of the analytic configuration, y being in this point an analytic function of x ; and, conversely, to each such point (x,y) corresponds in general one, and never more than one, value of z.*

[35] « *Wenn wir es mit einer mehrdeutigen Funktion zu thun haben, empfiehlt es sich meist, dieselbe durch eindeutige Funktionen darzustellen. So dient beispeilweise die Riemannsche Fläche vor allem der Zweck, einen Bereich zu schaffen, in welchem eine vorgelegte vieldeutige Funktion eindeutig wird. Ein anderer Fall ist der Kap.7, §14 behandelte, wo eine analytische Funktion : $w = f(z)$ einen Verzweigungspunkt endlicher Ordnung in $z=a$ hat. Hier gelang es uns, die Bestandteile eines der Funktions zugehörigen Wertepaares (w,z) vermöge zweier eindeutiger Funktionen eines Parameter t auszudrücken : $z = a+t^m$, $w= (t)$. Doch galt diese Darstellung nur im Kleinen, also für einen beschränkten Teil des Definitionsbereiches der Funktion. Dagegen sind schon von der Integralrechnung her gewisse Klassen von Funktionen bekannt, wobei es möglich ist, die Funktion in ihrem Gesamtverlaufe durch eindeutige Funktionen zur Darstellung zu bringen,- zu* uniformisieren*, wie man sich wohl auszudrücken pflegt.* »

3. Next may be mentioned the representation of the coordinates of an algebraic curve by the elliptic functions when p = 1, and, generally, by automorphic functions. Here the relation between (x,y) and z continues to be one-to-one im Kleinen*, but is one-to-infinity* im Grossen. [Osgood 1913 70]

On retrouve ici le thème de la bijectivité locale mais non nécessairement globale.

Le couple *im Kleinen / im Großen* est aussi utilisé dans le *Lehrbuch* dans le chapitre consacré aux fonctions multivoques et surfaces de Riemann. Nous l'avons écrit plus haut, Osgood ne présente pas une théorie abstraite des surfaces de Riemann : pédagogue par l'exemple, il décrit la construction des surfaces de Riemann associées à des fonctions de plus en plus complexes, avant d'établir quelques résultats d'un degré de généralité assez médiocre. C'est dans la première série d'exemple qu'on trouve le passage suivant : après avoir décrit la série de découpages et recollements nécessaires à la construction de la surface de la fonction w définie implicitement par l'équation $w^3 - 3w = z$, Osgood ressent le besoin de départager l'essentiel de l'accidentel :

> Est essentiel a) qu'au-dessus du voisinage de chacun des points $z_0 \neq -2, 2, \infty$ passent trois feuillets simples, servant de support à trois fonction univoques et analytiques dans ce voisinage ; b) qu'au voisinage des points $z = -2, 2$ passe un feuillet simple et deux autres regroupés en un cycle ; tandis que les trois feuillets se regroupent en $z = \infty$. Voilà pour ce qu'il en est *im Kleinen* ; il reste encore c) que les feuillets sont liés les uns aux autres comme le demande le cours *im Grossen* des différentes déterminations de la fonction. [Osgood 1912 374] [36]

On quitte donc provisoirement la description de procédures pour faire la liste des caractéristiques *intrinsèques* de la surface, caractéristiques qui se partagent en locales et globales. Autant le comportement local, plus précisément *local sur* la base que constitue la sphère complexe, est clairement décrit, au-dessus des points ordinaires comme au-dessus des points de ramification, autant l'aspect global semble difficile à saisir … les mots manquent. A cet endroit, une évocation des propriétés d'*Analysis situs* de la surface ne surprendrait aucun des lecteurs de 1912, d'autant plus qu'Osgood a introduit la notion d'ordre de connexion dès

[36] « *Wesentlich ist, a) daß über der Umgebung eines jeden der Punktes $z_0 \neq -2,2,\infty$ drei Blätter schlicht verlaufen, welche als Träger dreier in dieser Umgebung eindeutiger, sich analytisch verhaltender Funktionen dienen ; b) daß in der Umgebung der Punkte z = -2,2 ein Blatt schlicht verläuft, während zwei andere dort im Zyklus zusammenhängen ; sowie daß im Punkte z=∞ alle drei Blätter zusammenhängen. So viel im Kleinen ; dazu kommt noch, c) daß die Blätter so miteinander verbunden werden, wie es der Verlauf der verschiedenen Bestimmungen der Funktion im Großen verlangt.* »

la partie d'analyse réelle, à l'occasion de l'étude des fonctions définies par une intégrale curviligne d'une différentielle « complète » de deux variables réelles [Osgood 1912 123-146]; le *Lehrbuch* ne s'aventure d'ailleurs pas sur le terrain des intégrales abéliennes, peut-être par souci de rester un manuel élémentaire. Remarquons aussi que les caractéristiques intrinsèques *im Großen* semblent s'ajouter et non découler des aspects *im Kleinen*, ce qui éloigne du concept de variété abstraite tel qu'il sera proposé par Weyl. Enfin, une semblable partition des propriétés caractérisant une fonction, et non une surface de Riemann, se trouve sous la plume d'Osgood lorsqu'il présente la notion weierstrassienne de configuration analytique. Une fonction analytique est caractérisée *im Kleinen* par la propriété d'analyticité, et *im Großen* par son domaine d'holomorphie, « *Definitionsbereich* » ou « *Stetigkeitsbereich* » [Osgood 1901 39, Osgood 1912 435]. La présentation est identique pour les fonctions analytiques de plusieurs variables [Osgood 1901 98].

Le cas des fonctions de plusieurs variables complexes, abordé brièvement dans la quatrième partie de l'article de l'*Encyclopädie*, et faisant l'objet des exposés au *Madison Colloquium* en 1913, fournit à Osgood quelques occasions d'utiliser *im Kleinen* ou *im Großen*, rarement en couple d'ailleurs. Sans surprise, la version complexe du théorème des fonctions implicites donne des représentations paramétriques locales (« *Parameterdarstellung im Kleinen* » [Osgood 1901 106]). Un théorème plus général est énoncé, sans toutefois qu'une démonstration suffisante au yeux d'Osgood ait été donnée au delà de $n = 3$:

> Parametric Representation *im Kleinen. One other theorem we will mention, – the theorem of the representation of an analytic configuration im Kleinen. Let* $G(z_1,\dots,z_n)$ *be a function of* $z_1,\dots,z_n$*, analytic at the origin and vanishing there, but not vanishing identically. Then there exists a finite number of systems of equations*
>
> $$(1) \qquad z_k = \varphi_k(t_1,\dots,t_{n-1}) \quad k = 1,\dots,n,$$
>
> *where* $\varphi_k(t_1,\dots,t_{n-1})$ *is analytic at the origin* $(t) = (0)$ *and vanishes there, such that, throughout a certain neighborhood of that point, the numbers* $z_1,\dots,z_n$ *thus defined are roots of G. And conversely, to each root of G within a certain neighborhood of the origin there corresponds at least one system (1) which yields this point* ; [Osgood 1913 81]

Une place importante est bien sûr réservée au théorème de préparation de Weierstrass et à ses premières conséquences. Son usage dans l'étude du lieu d'annulation d'une fonction analytique de plusieurs variables complexes était déjà celui que lui assignait Weierstrass dans l'article *Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze* [Weierstrass 1894-1927 **2** 135-188], dont la première version (lithographiée) date de 1879 ; cet objectif est annoncé comme suit par Weierstrass en début d'article :

> Soit F($x,x_1,\ldots,x_n$) une fonction donnée, représentée sous la forme d'une ordinaire série de puissances, qui s'annule lorsque toutes les variables s'annulent, alors il existe toujours dans le domaine de convergence de la série une infinité de systèmes de valeurs des grandeurs $x,x_1,\ldots,x_n$ satisfaisant à l'équation F($x,x_1,\ldots,x_n$) = 0.
> Dans de nombreuses recherches il s'agit de rechercher ceux de ces systèmes de valeurs pour lesquels la valeur absolue de chacune des grandeurs ne dépasse pas une limite δ, à prendre arbitrairement petite. [Weierstrass 1894-1927 **2** 135] [37]

L'objectif est donc clairement celui d'une étude *locale*, type d'étude dont Weierstrass esquisse ici par une périphrase le contour général. Osgood reprend de Weierstrass ce théorème – qu'il nomme en anglais « *Theorem of Factorization* » – et il expose ses premières conséquences, en soulignant systématiquement le caractère local des résultats ; citons un peu longuement :

> *On the theorem of factorization can be based a theory of irreducible factors of an analytic function analougous to the theory in the case of polynomials. First as regards division. If $F(z_1,\ldots,z_n)$ and $\Phi(z_1,\ldots,z_n)$ are both analytic in the point $(a) = (a_1,\ldots,a_n)$ and Φ does not vanish identically, but does vanish at (a) ; and if, in the neighborhood of (a), a relation of the form*
>
> $$F(z_1,\ldots,z_n) = Q(z_1,\ldots,z_n)\ \Phi(z_1,\ldots,z_n)$$
>
> *Holds, Q being analytic at (a), then F is said to be divisible by Φ in the point (a).* [Osgood 1913 73]

Suivent les notions de fonction irréductible en un point (a) et de facteurs irréductibles équivalents en (a).

> *A function $G(z_1,\ldots,z_n)$ analytic at (a) and vanishing there, but not vanishing identically, can be written in one, and essentially only one, way as the product of factors each irreducible in (a).*

[37] « *Ist $F(x,x_1,\ldots,x_n)$ eine gegebene, in der Form einer gewöhnlichen Potenzreihe dargestellt Function von $x,x_1,\ldots,x_n$, welche, wenn diese Veränderlichen sämmtlich verschwinden, ebenfalls gleich Null wird, so giebt es stets unendlich viele, dem Convergenzbezirk der Reihe angehörige Werthsysteme der Grössen $x,x_1,\ldots,x_n$, welche die Gleichung $F(x,x_1,\ldots,x_n) = 0$ befriedigen. Bei vielen Untersuchen handelt es sich nun darum, von diesen Werthsystemen alle diejenigen zu bestimmen, für welche der absolut Betrag jeder einzelne Grösse eine – beliebig klein anzunehmende – Grenze δ nicht überschreitet.* »

> *A factor which is irreducible at a given point is not necessarily irreducible at every one of its vanishing points which lie in a certain neighborhood of the point*. [Osgood 1913 72].

Le terme *im Kleinen*, facultatif bien sûr, n'apparaît pas ici. L'exposé équivalent dans l'*Encyclopädie* est quant à lui intitulé *divisibilité locale* (« *Teilbarkeit im Kleinen* » [Osgood 1901 105]). Quant aux résultats *im Großen* en théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, ils sont regroupés dans l'article 48 de l'*Encyclopädie*, que nous citons en en entier :

> §48. Quelques propositions sur le comportement *im Großen*.
>
> Une fonction analytique F($z_1,\ldots,z_n$) n'ayant d'autres points singuliers que des points singuliers inessentiels, peut être représentée comme une fonction rationnelle ; si c'est seulement dans le fini qu'elle n'a d'autres points singuliers que des points singuliers inessentiels, alors elle peut être représentée comme quotient de deux fonctions entières (rationnelles ou transcendantes) qui s'annulent simultanément dans le fini au plus en les points singuliers de la fonction.
>
> Une fonction analytique de n>1 arguments ne pouvant avoir de points singuliers isolés (n°42), une extension immédiate de la proposition du §34 à de telles fonctions est impossible. On a cependant d'après Weierstrass la proposition plus restreinte : à un domaine quelconque (T) du point ($z_1,\ldots,z_n$) correspondent des fonctions univoques, n'ayant dans (T) d'autres points singuliers que des points singuliers inessentiels, et présentant un point singulier essentiel en tout point frontière de (T). [Osgood 1901 111][[38]

Osgood renvoie pour le premier point à Poincaré et Cousin. Ce point est beaucoup plus détaillé en 1913 dans le paragraphe sur *« The Representation of Certain Meromorphic Functions as Quotients* » [Osgood 1913 44] où la famille de problèmes est présentée depuis Weierstrass et Mittag-Leffler ; Osgood y signale la correction que Gronwall apporte aux théorèmes énoncés par Cousin. En 1913, par contre, le terme *im Großen* n'apparaît pas. Le

[38] « *48. Einige Sätze über das Verhalten im Grossen. Hat eine analytische Funktion F($z_1,\ldots,z_n$) keine anderen als nur ausserwesentliche singuläre Stelle, so lässt sich dieselbe als eine rationale Funktion darstellen ; hat sie bloss im Endlichen keine anderen als ausserwesentliche singuläre Stellen, so lässt sie als Quotient zweier ganzer (rationaler oder transcendenter) Funktionen darstellen, die im Endlichen höchstens in singuläre Punkten der Funktion gleichzeitig verschwinden.*
Da eine analytische Funktion von n>1 Argumenten keine isolierte singuläre Stelle haben kann (Nr.42), so ist eine unmittelbare Ausdehnung des Satzes von Nr.34 auf solche Funktionen nicht möglich. Es besteht jedoch nach Weierstrass der engere Satz : Einem beliebigen Bereich (T) des Punktes ($z_1,\ldots,z_n$) entsprechen eindeutige Funktionen, die in (T) keine anderen als nur ausserwesentliche singuläre Stellen haben und in jedem Begrenzungspunkte von (T) einen wesentlichen singulkären Punkt aufweisen. »

deuxième point renvoie au paragraphe 34 consacré aux fonctions de domaine de définition donné (« *Funktionen mit vorgegebenem Definitionsbereich* » [Osgood 1901 82]), dans lequel Osgood énoncé le résultat de Weierstrass sur l'existence, pour tout domaine T du plan complexe, d'une fonction univoque analytique dans T ayant un point singulier en tout point frontière de T. Cette proposition n'était pas alors qualifiée de *im Großen*.

Chapitre 8 : Hadamard : le thème.

Lorsqu'en 1906 Jacques Hadamard démontre son théorème d'inversion globale, il a déjà contribué à plusieurs branches de mathématiques : théorie des fonctions d'une variable complexe, depuis sa thèse étudiant le lien entre la nature des singularités sur le bord du disque de convergence et la vitesse de divergence de la série lorsqu'on s'en approche, jusqu'à des prolongements des théorèmes de Weierstrass et Mitag-Leffler sur les fonctions entières ; équations différentielles et aux dérivées partielles, avec l'introduction, aux côtés de Pincherle, Volterra puis Fréchet, d'un point de vue relevant de ce qu'on nommera quelques années plus tard l'Analyse fonctionnelle ; théorie qualitative des géodésiques sur les surfaces à courbure de signe constant, inspirée des travaux de Poincaré sur les courbes définies par une équation différentielle et sa Mécanique céleste ; Mécanique aussi, et pédagogie, Hadamard prenant une part active à la réforme de l'enseignement secondaire de 1902. Le couple local/global n'intervient pas explicitement dans les travaux antérieurs à 1906, bien que ceux-ci, sur les fonctions entières comme sur les géodésiques, soient globaux. Nous voudrions présenter trois textes dans lesquels ce couple joue, au contraire, un rôle central et qui s'enrichit progressivement : tout d'abord l'article de 1906 *Sur les transformations ponctuelles* [Hadamard 1906b][1] dans lequel il démontre un théorème d'inversion global ; la leçon inaugurale de la chaire de Mécanique analytique et Mécanique Céleste au Collège de France, en 1909, portant sur *La géométrie de situation et son rôle en Mathématiques* ; enfin l'analyse de l'œuvre de Poincaré que Hadamard rédige à la mort de ce dernier, en 1912, dans laquelle il utilise un triplet infinitésimal-local-global comme outil de lecture majeur des travaux de son illustre prédécesseur. Notre formulation n'est toutefois pas exacte : si c'est bien du couple local/global qu'il est question dans ces textes et si le terme « local » est déjà systématiquement utilisé, la contrepartie du local n'est pas désignée par « global » mais par une série assez large de termes. On verra qu'en France cette situation perdure jusque dans les années 20, aussi bien sous la plume de Hadamard que sous celle d'Elie Cartan.

I. Inversion locale et inversion globale.

Le théorème est présenté dans une note aux *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences* en janvier 1906 [Hadamard 1906a], puis démontré de deux manières différentes dans un article

[1] Nous utilisons la pagination de [Hadamard 1968].

paru la même année dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France* [Hadamard 1906b]. L'intérêt de cet article réside pour nous moins dans la démonstration du théorème que dans les différentes formulations du problème que Hadamard prend soin de donner, ainsi dans l'analyse qu'il propose des stratégies de résolutions parfois erronées et trompeuses. Le problème est présenté en détail malgré sa grande simplicité :

> Soient données les équations
>
> $$(I)\ \begin{cases} X_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ X_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ X_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$
>
> qui peuvent être considérées comme faisant correspondre à un point quelconque $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un espace e_n à n dimensions, un point $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ d'un espace analogue E_n, point que nous nommerons l'*image* du premier.
>
> Ces équations sont-elles résolubles en $x_1, x_2, \ldots, x_n$? A tout point de E_n, peut-on faire correspondre d'une manière univoque un point de e_n auquel il serve d'image ?
>
> Il est clair que la question est double. Les valeurs de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant données, elle consiste à se demander :
>
> I. Si les équations (I) admettent toujours (en $x_1, x_2, \ldots, x_n$) une solution ; (*possibilité*)
>
> II. S'il est impossible que ces équations admettent plus d'une solution. (*unicité*)
>
> [Hadamard 1906b 349]

On voit le jeu de reformulation entre le langage des équations et un langage des applications qui passe par l'introduction d'espaces géométriques. Le langage des équations, avec ses questions de possibilité et d'unicité, domine toutefois et la formulation en terme d'univocité et de domaine de définition de la fonction inverse n'est pas donné. Les grandeurs impliquées sont implicitement réelles, les espaces e_n et E_n sont implicitement les espaces $\mathbf{R}^n$ et non de quelconques variétés à n dimensions ; Hadamard est toutefois conscient de ces limitations comme on le verra à la fin de son article.

Avant d'entrer dans la démonstration, Hadamard commence par présenter les outils à sa disposition, en soulignant les limites de l'apport de chacun. Le premier est l'outil différentiel :

> Les méthodes du Calcul différentiel conduisent à en chercher la solution dans les propriétés infinitésimales des fonctions f qui définissent la transformation. Une condition nécessaire bien connue est (en supposant que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ admettent des dérivées premières continues) que le *déterminant fonctionnel*
>
> $$(2)\ \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2 \ldots, x_n)}$$

> *soit de signe constant.*
>
> Cette condition prise au sens étroit est d'ailleurs suffisante *localement*, c'est à dire que si, a $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ étant un point de e_n où le déterminant (2) n'est pas nul et $A(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ son image, on peut, autour de ce dernier point, décrire une sphère assez petite pour qu'un point quelconque pris à son intérieur soit l'image d'un point et d'un seul voisin de a. [Hadamard 1906b 350]

Aux éléments classiques du niveau *méta* que sont possibilté/unicité, condition nécessaire/suffisante, s'ajoute celui de la *validité locale*, d'ailleurs prise dans la construction complexe du type : « condition localement suffisante ». Pour banal que cet enchaînement puisse nous sembler, il est l'un des premiers où le terme « local » apparaît explicitement, et il n'était pas tel quel présent dans les textes d'Osgood auxquels nous nous sommes intéressés. Comme on l'imagine, Hadamard poursuit en montrant que cette condition n'est pas suffisante, non sans souligner que l'oubli du caractère local du théorème classique est une source d'erreur classique :

> On a quelquefois admis que la condition était suffisante d'une manière générale, c'est-à-dire que, si elle est vérifiée quel que soient $a_1,a_2,\ldots,a_n$, elle entraînait, quels que soient $X_1,X_2,\ldots,X_n$, une réponse affirmative aux questions (I) et (II). [Hadamard 1906b 350]

La dénonciation de l'erreur était plus vive dans le texte paru aux C.R.A.S.

> Cette question toute élémentaire a reçu, à maintes reprises, une réponse inexacte. [Hadamard 1906a 74]

On en retrouve un écho en 1911 dans un article *Sur les trajectoires de Liouville* où l'analyse du problème est suivie de la mise en garde :

> *Mais tout ceci est subordonné à l'inversion des équations* (5) *ou* (6), c'est-à-dire à leur résolution par rapport aux u en fonction de s, b (ou de t et des b). Or, l'inversion d'un système de relations à plusieurs variables offre des difficultés particulières. Pour affirmer que cette inversion est possible, il ne suffit pas, contrairement à ce qu'on a parfois supposé un peu hâtivement, de s'assurer, sans autre précaution, que le déterminant fonctionnel des premiers membres de l'équation en question (ici le déterminant des h_{ik}) est toujours différent de zéro. [Hadamard 1911 1891]

Si l'on revient à la formulation de l'article de 1906, on remarque aussi que « localement » ne s'oppose pas à « globalement » mais à « d'une manière générale » : si « localement » renvoie bien à un type de lieu, ce n'est pas le cas de sa contrepartie qui, elle, renvoie à l'articulation logique ; la validité « générale » s'oppose à la simple validité partielle. L'articulation entre deux modes de lecture des énoncés, un mode logique et un mode *embedded* (relatif aux domaines) n'est pas ici complètement explicitée ; on pourrait le faire ainsi : on ne passe pas de l'énoncé général à l'énoncé local en ajoutant une hypothèse mais en restreignant le domaine sur lequel porte la conclusion. Signalons aussi que les termes « local » ou « localement » étaient absents dans la note aux C.R.A.S.

Pour montrer le caractère non suffisant de la non annulation du déterminant jacobien, il suffit à Hadamard de donner l'exemple d'une fonction à une variable strictement monotone mais non surjective. Pour remédier aux défauts de surjectivité, il introduit une condition plus forte que celle de non annulation du déterminant jacobien :

> La quantité qu'il convient d'introduire ici, à la place du déterminant fonctionnel, est évidemment *l'axe mineur μ de l'ellipse* ou de *l'ellipsoïde de déformation*, c'est-à-dire la plus petite valeur du rapport
>
> $$\sqrt{\frac{dX_1^2+dX_2^2+\ldots+dX_n^2}{dx_1^2+dx_2^2+\ldots+dx_n^2}},$$
>
> et la condition qu'il y a lieu de se donner à cet égard est :
>
> [Condition C], que, μ_ρ désignant le *minimum de μ sur la sphère*
>
> (4) $$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=\rho^2$$
>
> *de l'espace e_n, l'intégrale*
>
> (5) $$\int_0^\infty \mu_\rho d\rho$$
>
> *soit infinie*. [Hadamard 1906b 351]

Ce critère analytique est immédiatement reformulé plus géométriquement :

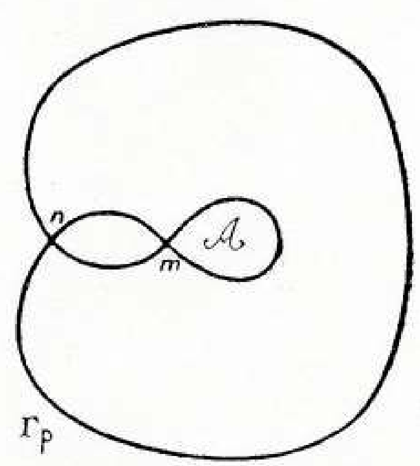
> Si cette condition est remplie, une ligne de longueur infinie tracée dans e_n ne pourra pas avoir pour image une ligne de longueur finie. [Hadamard 1906b 351]

Lorsque Hadamard reviendra sur ce théorème, soit pour l'utiliser comme dans l'article de 1911 sur les trajectoires de Liouville, soit dans une conférence de 1928 sur *Le développement et le rôle scientifique du calcul fonctionnel* [Hadamard 1928], c'est la seule formulation géométrique qu'il donne, qui est une condition topologique de propreté. Par contre, seule la formulation analytique était donnée dans la note aux C.R.A.S., bien que ce soit sa conséquence topologique qui intervienne dans la démonstration : dans les quelques mois qui séparent la note de l'article, non seulement le discours s'enrichit du « localement » mais les formulations géométrique – ou topologiques – prennent une importance qu'elles vont garder.

Après avoir introduit la condition (C) pour remédier au défaut de surjectivité qui se manifeste dès la dimension un, Hadamard continue à déplier soigneusement les articulations du problèmes en montrant que le passage aux dimensions supérieures fait apparaître un problème d'injectivité qui ne se présentait pas en dimension un.

> (…) contrairement à ce qui arrive dans le cas d'une variable, on sait que le non évanouissement du déterminant fonctionnel, dans une région finie, quelconque de e_n, *n'assure même plus l'unicité*. Les fonctions
>
> $$(\Gamma)\begin{cases} X_1=f_1(x_1,x_2) \\ X_2=f_{21}(x_1,x_2) \end{cases}$$
>
> étant définies dans une région déterminée (σ) du plan des x_1,x_2 et ayant, dans toute cette région, leur déterminant fonctionnel positif et non nul, une aire s intérieure à σ, limitée par une courbe fermée univoque (sans point double) γ, peut avoir pour image une aire se recouvrant partiellement elle-même, γ ayant pour image une courbe Γ à points double, analogue à celle qui est représentée figure I. Un même point de cette aire peut alors être l'image commune de plusieurs points de s. En un mot, les données précédentes ne fournissent aucun renseignement sur la résolubilité des équations (I'), sauf à l'intérieur de cercles suffisamment petits – dont les méthodes classiques ne font même pas connaître explicitement le rayon. [Hadamard 1906b 351]

Fig. 1.



[Hadamard 1906b 358]

Nous n'entrons pas ici dans le détail de la démonstration. On doit toutefois signaler que la note aux C.R.A.S. contient une démonstration spécifique à la dimension deux, alors que l'article présente, outre cette première démonstration, une autre valable en toutes dimensions. Les deux démonstrations procèdent par l'absurde en supposant qu'un disque de rayon ρ ait une image du type représenté à la figure 1. La première démonstration montre que lorsque ρ

tend vers l'infini la partie A, extérieure à l'image, n'est pas détruite, ce qui permet d'obtenir un chemin partant à l'infini dans le plan e_n dont l'image reste bornée dans le plan E_n d'où contradiction. Les deux outils de cette démonstration sont l'indice d'un point par rapport à une courbe et l'évolution des points singuliers de la courbe Γ lorsque celle-ci se déforme à mesure que ρ tend vers l'infini : outils déjà bien classiques, largement utilisés dans le demi-siècle précédent. L'étude de l'évolution des points doubles dans la déformation continue des courbes sur une surface avait d'ailleurs déjà fait l'objet d'un petit travail de Hadamard en 1900 dans l'article *Sur les points doubles des contours fermés* [Hadamard 1900], dans lequel il se proposait de compléter le travail de Jordan de 1866 ! Dans cette première démonstration, le rôle de l'inversibilité locale est assez masqué. Le contraste est frappant avec la seconde démonstration : c'est moins sa plus grande généralité – elle est certes valide en toute dimension – que le changement d'outil qui nous intéresse. Le point de départ est un peu plus simple et n'est pas la classique figure I : supposons qu'un chemin simple reliant deux points a, b *distincts* de e_n ait pour image un chemin fermé de E_n ; par rapport à la situation I, la formulation de non injectivité se trouve épurée. Pour ce qui est des outils, c'est cette fois le théorème d'inversion local qui fournit le ressort principal de la démonstration : à chaque point de e_n est associé un diamètre d (resp. un diamètre D), diamètre maximal de boules de e_n (resp. E_n) sur lesquelles l'inversion locale est valide. Hadamard affirme que les fonctions d et D sont continues dans e_n, admettant donc un maximum dans une région bornée ou une ligne finie. C'est un jeu d'aller-retour entre les extrema de ces fonctions et le diamètre des figures pathologiques qui permet d'obtenir la contradiction.

Après la présentation détaillée des différents aspects du problème et l'exposé des deux démonstrations, différant par leur esprit comme par leur portée, Hadamard conclut son article sur deux remarques.

> Remarquons, pour finir, que les hypothèses de dérivabilité faites en commençant sur nos fonctions f_i ne sont nullement nécessaires. Il suffit de supposer ces fonctions *continues*, et d'imposer les conditions suivantes :
>
> A. Tout point a de e_n est le centre d'une sphère σ_a telle que deux points distincts intérieurs à cette sphère ne puisse avoir la même image.
>
> B. L'image de tout point a de e_n est (dans E_n) le centre d'une sphère telle que tout point intérieur à cette sphère soit l'image d'un point intérieur à σ_a.
>
> C. Une ligne joignant l'origine à un point indéfiniment éloigné de e_n ne peut avoir pour image une ligne rectifiable et de longueur finie dans E_n.

Les deux premières reviennent à dire que le résultat que l'on se propose de démontrer est supposé vrai *localement*, c'est-à-dire au voisinage d'un point quelconque. [Hadamard 1906b 363]

On n'est plus dans la dénonciation de l'illusoire portée d'un théorème n'utilisant que des arguments issus du calcul différentiel, on est dans l'identification d'une forme générale de théorème ; il manque toutefois un terme comme « global » : le théorème n'est pas un exemple de passage du local au global – moyennant une hypothèse topologique ici encore formulée de manière géométrique – mais un théorème de dépassement du local. Un bref article de 1919 vient compléter celui de 1906 ; les deux conditions A et B sont résumées en une seule : « la transformation est invertible [sic] localement autour de tout point de l'espace » [Hadamard 1919 383], le caractère nécessaire des conditions est établi en quelques lignes. En 1906, l'autre remarque conclusive de Hadamard explicite le fait que e_n et E_n, bien qu'étant en un sens les espaces généraux d'évolution de variables réelles libres, sont des espaces *particuliers*, et que le théorème ainsi démontré s'inscrit dans une *famille* plus large où la légalité du lieu se manifeste :

Notre conclusion est, comme on le voit, liée de la manière la plus absolue à ce fait que la transformation est considérée dans le plan *complet*. Elle ne subsisterait plus nécessairement dans une région limitée par une ligne quelconque Λ, à moins que l'on ne possède d'autres données ; que l'on connaisse, par exemple, la propriété d'unicité pour les points qui correspondent à des points de Λ.

La conclusion est évidente pour la sphère (notre démonstration se confondant alors, comme nous l'avons dit, avec une démonstration classique).

Par contre, elle ne subsiste pas sur les variétés multiplement connexes, telles qu'un tore, ou un cylindre de révolution indéfini. Sur ce dernier, par exemple, si z et θ sont (avec le rayon a du cylindre) les coordonnées semi-polaires, la transformation

$$\left|\begin{array}{l} z, \dfrac{z}{p}, \\ \theta, p\theta \end{array}\right.$$

(p étant un entier quelconque) n'est pas biunivoque, quoique μ soit constant. [Hadamard 1906b 361]

Le cas d'une portion de plan limitée par une courbe fermée simple transformée en une autre courbe simple inclut dans la famille le théorème de Jordan et le théorème qu'Osgood nomme théorème d'application conforme *im Grossen*. Il semble que la découverte du contre-exemple fourni par le tore soit intervenue entre la publication de la note aux C.R.A.S. et l'article du Bulletin ; la note, en effet, loin d'évoquer un contre-exemple, se contentait de conclure par :

> Il est aisé de voir ce que devient la propriété précédente pour des variétés à connexions multiples. Il n'est pas douteux non plus qu'elle ne s'étendent aux espaces trois ou plus de trois dimensions. Mais les considérations d'*Analysis situs* deviendraient alors plus compliquées. [Hadamard 1906a 77]

C'est la difficulté de l'extension en toute dimension de la démonstration initiale, nécessitant les notions d'indice et la discussion des déformations des points d'auto-intersection, qui peut poser problème, pas, semble-t-il, la validité du théorème. Dans le temps qui sépare la note de l'article, l'extension aux variétés à connexion multiple a soudain paru moins « aisée », sans que Hadamard n'explicite le rôle du groupe fondamental ou fasse la moindre allusion à une notion de revêtement.

II. Le rôle de l'*Analysis situs*.

1. Les géodésiques des surfaces de courbure négative.

Lorsqu'en 1909 Hadamard fait sa conférence inaugurale au Collège de France consacrée à l'*Analysis situs*, il a déjà rencontré dans ses travaux la topologie aussi bien sous forme d'*Analysis situs* que sous sa forme plus ensembliste. Pour l'aspect ensembliste, sans contribuer directement à ce domaine, Hadamard attire l'attention dès 1897, lors du premier Congrès International des Mathématiciens à Zürich, sur *Quelques applications possibles de la théorie des ensembles* :

> Quoique la théorie des ensembles fasse abstraction de la nature des éléments, on a surtout considéré, jusqu'à présent, les ensembles composés de nombres, de points dans l'espace à *n* dimensions. Il ne semble pas inutile de signaler l'intérêt qu'il y aurait à étudier des ensembles composés de fonctions. [Hadamard 1897 311]

Ainsi de nombreux problèmes d'existence en théorie des équations aux dérivées partielles sont liées à des questions de minimum, ce qui invite à une étude plus fine de la topologie de l'ensemble de fonctions considéré :

> Il est clair, en effet, que de telles questions sont intimement liées à la nature du domaine dans lequel le minimum est recherché. Par exemple, le minimum d'une quantité f(x,y,z) qui dépend continûment des coordonnées d'un point existe toujours sur une surface fermée (ou dont les bords sont considérés comme faisant partie de la

surface) ; il n'existe pas nécessairement si une ligne ou un point donné sont exclus. [Hadamard 1897 311]

L'autre piste évoquée par Hadamard dans ce bref exposé concerne les recouvrements d'ensembles de fonctions par des boules de taille donnée. La principale rencontre de Hadamard avec la topologie avant 1909 a toutefois lieu dans ses travaux globaux sur les géodésiques des surfaces à courbure négative, en particulier dans l'article *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques* [Hadamard 1898]. Les termes local/global (ou des analogues stricts) n'y sont pas employés et les aspects globaux y sont saisis comme relevant de l'*Analysis situs* : c'est d'ailleurs sous le triple parrainage de Darboux, pour la géométrie différentielle, de Jordan pour la topologie, et Poincaré pour la topologie et l'étude qualitative des équations différentielles, que se place Hadamard. Il commence par définir ses objets d'étude, les surfaces de l'espace ordinaire, recouvertes par des régions empiétant les unes sur les autres et chacune différentiablement paramétrable : la description est la même que celle de Poincaré dans le paragraphe 3 de son *Analysis situs* de 1895. Hamadard souligne que les changements de paramètres ont des propriétés de bijectivité pour des valeurs très voisines de valeurs données. Après cette brève mise en place et avant d'introduire les notions d'*Analysis situs*, essentiellement relatives à la déformation des chemins, Hadamard use d'un artifice pour ramener à un cas compact des surfaces à courbure négative qui ont nécessairement des nappes infinies ; il restreint son étude à des surfaces dont les propriétés topologiques sont, en un sens, stables à l'infini :

> Soit encore S' une partie finie de la surface, limitée par certaines courbes fermées $C_1, C_{2,\ldots,} C_n$. Nous supposerons que, si ces courbes ont été convenablement choisies, on peut les faire varier continûment de manière à les éloigner jusqu'à l'infini (par conséquent à faire tendre S' vers la surface entière S), sans que, dans cette variation, la surface S' cesse de rester identique à elle-même, au point de vue de la géométrie de situation. (…)Moyennant l'hypothèse précédente, nous pourrons appliquer à notre surface l'*Analysis situs* ordinaire, les propriétés topologiques de S étant, *par définition*, celles de la surface S' à un moment quelconque de sa variation. [Hadamard 1898 733]

On a moins un problème de compacité, au sens où Hadamard aurait besoin de recouvrements finis ou de fonctions admettant des *extrema*, que le souci de se ramener à une description des surfaces par ordre de connexion et nombre de composantes du bord. Pour aborder la question des géodésiques, Hadamard s'inspire explicitement des travaux de Poincaré sur les courbes définies par une équation différentielle, citant Poincaré dans ses *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* sur le rôle des solutions périodiques, géodésiques fermées, « seule brèche par laquelle nous puissions pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable » [Hadamard 1898 775]. Après avoir distingué les *types* de chemins des *espèces* de chemin, selon que la déformation sur la surface est libre ou à extrémités fixes, il établit :

> Théorème.- A chaque espèce de contour fermé correspond une géodésique, et il n'en correspond qu'une seule. [Hadamard 1898 756]

Il en tire quelques conséquences permettant d'illustrer le rôle de la topologie d'une surface à courbure négative: il n'existe pas de géodésique réductible à un point ; une surface d'ordre de connexion égal à 2, ayant donc la topologie d'une anneau plan, n'a qu'une géodésique fermée (si on la distingue pas de ses multiples), alors que dès que l'ordre de connexion dépasse deux la surface admet une infinité de géodésiques fermées. Suivant l'exemple de Poincaré, Hadamard étudie ensuite différents types de géodésiques au moyen de la relation qu'ils entretiennent avec les géodésiques fermées : géodésiques asymptotiques, géodésiques s'éloignant à l'infini etc. Le texte se conclut sur deux remarques générales, l'une sur la notion de stabilité et la dépendance envers les conditions initiales, l'autre, et c'est son écho que l'on trouvera dans les textes ultérieurs de Hadamard, sur le rôle de la topologie :

> Quant à la méthode que nous avons employé ici, on peut la considérer comme une application des deux principes posés par M. Poincaré dans ses études sur les équations différentielles. En premier lieu, nos conclusions mettent en évidence, une fois de plus, le rôle fondamental que joue dans ces questions l'*Analysis situs*. Qu'il soit absurde d'étudier des courbes intégrales tracées dans un domaine déterminé sans faire entrer en ligne de compte la forme même de ce domaine, c'est une vérité sur laquelle il peut sembler inutile d'insister longuement. Cette vérité est cependant restée insoupçonnée jusqu'aux travaux de M. Poincaré. [Hadamard 1898 775]

Les éléments de niveau *méta* sont encore, dans cet article de Hadamard, ceux de Poincaré : importance de l'*Analysis situs* dans les questions d'Analyse, possibilité et importance de l'étude qualitative. C'est en 1909 qu'on voit apparaître des éléments plus spécifiques à Hadamard.

2. La *Leçon inaugurale* de 1909.

La Leçon inaugurale de la chaire de Mécanique analytique et Mécanique céleste du Collège de France sur *La géométrie de situation et son rôle en mathématique* [Hadamard 1909b] est d'une nature différente de celles d'articles de recherche, tels l'article de 1898 sur les géodésiques des surfaces à courbure négative ou celui de 1906 sur l'inversion. Elle ne contient aucun résultat, aucune définition, aucune démonstration ; en revanche elle présente les problèmes, les classe, analyse leur ressort ; elle fait la synthèse des éléments rencontrés précédemment par Hadamard dans ses propres travaux et propose une certaine relecture de l'histoire des mathématiques sur des thèmes qui, bien que n'étant pas formulés dans ces termes, sont ceux de la légalité du lieu et de la difficulté du passage du local au global. Hadamard ouvre son exposé bien classiquement sur une définition informelle de l'*Analysis situs* comme science des propriétés stables par déformations sans déchirure, coupure ni recollement. Il poursuit par une première phase d'exposé historico-conceptuel en revenant sur le développement, au 19e siècle, de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Les travaux de Cauchy, explique Hadamard, ouvrent certes la voie à cette théorie, mais ils sont incapables d'expliquer, dans le cas des fonctions algébriques, l'omniprésence d'un nombre entier, le genre.

> Riemann remarque d'abord que le plan considéré jusqu'alors donne une image insuffisamment fidèle du domaine à explorer, puisqu'à un point de ce plan correspond plusieurs points de la courbe donnée. Il le dédouble donc en plusieurs feuillets et arrive ainsi à la surface qui porte son nom : à chaque point de celle-ci ne correspond, cette fois, qu'un seul état de grandeur des quantités dont on examine la variation. [Hadamard 1909b 814]

Les propriétés de ces surfaces sont indépendantes de certaines déformations, elles relèvent de l'*Analysis situs* dont Riemann, le premier, a montré l'importance. Hadamard propose alors un parallèle avec la théorie des polyèdres, dans laquelle Legendre et Cauchy, après Euler, ont cherché à établir une formule sans voir qu'ils supposaient implicitement que leurs polyèdres n'avaient pas d'anse.

> Non seulement, comme on le voit, Cauchy s'était laissé égarer par l'exemple d'Euler ; mais la lacune qu'il laissait subsister tenait à la même cause qui devait arrêter sous sa plume le développement de la théorie des fonctions algébriques ; [Hadamard 1909b 816]

Ainsi s'esquisse, sans pour autant recevoir d'explication, un phénomène général de « manque à regarder », d'*ablépsie* ($\alpha\beta\lambda\varepsilon\psi\iota\alpha$), pour reprendre un terme que Hadamard utilisera en d'autres circonstances [Hadamard 1954 2267]. Ce défaut de prise en compte de la forme s'oppose au caractère élémentaire et intuitif des vérités topologiques, en particulier du genre comme nombre d'anses :

> Je ne crois pas que, depuis cette découverte de Riemann, qui que ce soit ait pu l'étudier sans être frappé de son extraordinaire simplicité, de ce qu'elle a de presque puéril. [Hadamard 1909b 814]

Quelques lignes plus loin, à propos des mêmes notions :

> (…), tout se dégage, grâce à leur emploi, non plus avec cette évidence qui est pour Descartes le signe de la certitude mais avec ce que j'appellerai, en usant d'un terme un peu barbare, cette surévidence qui fait que la question et sa réponse ne font qu'un. [Hadamard 1909b 815]

On voit que cette première partie de l'exposé reprend, à propos de la théorie des fonctions et non des équations différentielles ou des géodésiques, les mêmes éléments *méta* que l'article de 1898. Comme alors, le passage se clôt sur l'image d'un Poincaré, véritable (et quasiment unique) successeur de Riemann :

> Quoi qu'il en soit, si frappante que fût la leçon qui se dégageait de la découverte de Riemann, cette leçon fut perdue. On peut dire qu'elle le resta jusqu'aux travaux de M. Poincaré. Les géomètres surent utiliser la méthode de Riemann pour l'objet spécial en vue duquel il avait été créé, mais ils ne se demandèrent pas si elle ne trouvait pas son emploi dans d'autres circonstances encore, si elle n'avait pas une portée plus générale. [Hadamard 1909b 817]

Ce premier passage historico-conceptuel débouche sur un passage purement conceptuel dans lequel Hadamard reprend les thèmes introduits dans l'article de 1906, quasiment dans les mêmes termes. Après avoir posé les termes du problème de l'inversion, il stigmatise l'erreur qui consisterait à conclure directement de l'inversion locale à l'inversion globale ; ce ne sont bien sûr pas ces termes qu'il utilise, mais l'image du domaine qui finit par revenir sur lui-même :

> (…) cette conclusion est erronée : ce recouvrement qui n'existe jamais entre deux parties immédiatement voisines de T, peut fort bien exister entre deux parties éloignées. [Hadamard 1909b 818]

La nature de cette erreur est ensuite exposée par un autre moyen ; le théorème global dépend de la forme du domaine bidimensionnel :

> Mais les droites ne sont pas les seules lignes et les plans ne sont pas les seules surfaces que l'on nous puissions faire décrire à nos points. En particulier, nous pouvons imaginer que lignes ou surfaces, au lieu d'être indéfinies comme le sont les droites et les plans, soient *fermées*. (…) [sur une sphère] Il se trouve que la conclusion erronée tout à l'heure devient exacte dans le cas présent. [Hadamard 1909b 818]

Elle redevient erronée sur le tore etc. Hadamard reste ici au niveau de l'exemple : il faudra attendre le texte de 1912 sur l'œuvre de Poincaré pour que le retour sur ces exemples conduisent à une réflexion sur l'indiscernabilité locale des variétés. Pour l'heure, c'est sur la tension entre le local et le global que Hadamard choisit de poursuivre la réflexion, en introduisant des éléments nouveaux par rapport aux textes de 1898 et 1906. Plus précisément, un deuxième passage historico-conceptuel permet d'éclairer la tension entre le local – en lien avec le différentiel – et le global – saisi comme relevant de l'*Analysis situs*. Le panorama est vaste :

> Deux méthodes nouvelles, après l'Algèbre, ont permis aux mathématiques modernes de dépasser le domaine que la science grecque avait si bien exploré, mais dont elle n'avait pu sortir : la Géométrie analytique et le Calcul infinitésimal. [Hadamard 1909b 820]

Chacune a ses apports spécifiques, deux en particulier pour le Calcul infinitésimal :

> D'une part les fonctions ou, géométriquement parlant, les courbes les plus diverses étudiées jusque là ont une ressemblance remarquable dans le domaine de l'infiniment petit où leurs propriétés deviennent remarquablement simples. De l'autre, on peut, dans beaucoup de cas, remonter de ces propriétés infinitésimales à celles que présentent les fonctions ou les courbes en question dans le domaine fini. [Hadamard 1909b 820]

On trouve ici un élément qui sera beaucoup développé en 1912 : aux niveaux locaux et globaux s'ajoutent un troisième niveau, infinitésimal ; le Calcul différentiel indique comment, « dans beaucoup de cas », dépasser le niveau infinitésimal. Le thème n'est ici qu'esquissé, sous la forme d'un passage de l'infinitésimal au fini qui n'engrène pas directement sur le couple local/global comme aurait pu le faire l'évocation du passage de l'infinitésimal au local, appuyée, par exemple, sur le théorème classique d'inversion locale. L'esquisse des apports de la Géométrie analytique et du Calcul infinitésimal n'est présentée que pour souligner leurs limites : chacun se heurte à une limite, présente une insuffisance, une impuissance. Pour ce qui est de la Géométrie analytique, Hadamard le constate plus qu'il ne l'explique :

> Le point de vue classique de la Géométrie analytique peut être strictement adéquat à la représentation d'une portion de sphère ; il ne peut l'être à la représentation de la sphère entière. Le fait qu'il en est ainsi quel que soit le système de coordonnées adopté, doit déjà nous avertir qu'il n'y a pas là un phénomène fortuit. [Hadamard 1909b 821]

Pour ce qui est du Calcul infinitésimal, sa nature même en prescrit les limites ; citons longuement ce passage essentiel :

> (…) des remarques analogues s'imposent à plus forte raison lorsqu'on passe à l'application du Calcul infinitésimal. Celui-ci prend pour base la connaissance d'une petite région du domaine proposé. A ce petit fragment, on juxtapose les fragments analogues voisins ; et c'est ainsi que, de la connaissance de chaque parcelle, on déduit celle de l'ensemble, de même que la carte de France est constituée par l'ensemble des feuilles de l'état-major. Ce n'est pas autrement que procède le Calcul intégral ; (…) Or, nous l'avons vu tout à l'heure, des problèmes qui se comportent de la même façon si on les prend dans une région suffisamment petite d'un domaine, peuvent différer totalement dans l'ensemble. Autrement dit, il ne suffit pas d'avoir fait l'étude des différentes feuilles de la carte, mais il faut la compléter par celle du tableau d'assemblage, et il y a plusieurs sortes de tableaux d'assemblages, essentiellement différents entre eux. [Hadamard 1909b 820]

La clarté de ce passage n'en diminue pas le degré d'élaboration qu'on mesure, par exemple, en le comparant avec le bref cri du cœur qui concluait l'article de 1898 : « Qu'il soit absurde d'étudier des courbes intégrales tracées dans un domaine déterminé sans faire entrer en ligne de compte la forme même de ce domaine, c'est une vérité sur laquelle il peut sembler inutile d'insister longuement. » [Hadamard 1898 775]. La réflexion s'est enrichie d'une articulation entre trois niveaux – infinitésimal, local, global – appuyée sur l'exemple des théorèmes d'inversion ; les limites internes de la Géométrie analytique et du Calcul infinitésimal, quelque différentes que soient ces théories, fusionnent dans l'opposition entre le « petit domaine » et le domaine d'ensemble ; la structure topologique globale est saisie par les règles d'ajustement des domaines partiels, faisant le lien avec le mode de donation de l'objet issu de la géométrie différentielle. Les termes employés ne sont toutefois ni *im Kleinen / im Großen*, dont on ne trouve pas trace chez Hadamard, ni local /global : le terme « local » utilisé en 1906 n'est pas ici repris ; le global était alors saisi comme « général » par opposition au particulier de l'inversion au voisinage de chaque point, il l'est ici comme « dans l'ensemble » par opposition aux domaines partiels. Hadamard choisit ensuite de reformuler les mêmes conclusions, mais en passant du registre *embedded* à un registre plus classique dans lequel l'opposition centrale est entre Analyse et synthèse :

> Ainsi les puissants outils qui avaient donné à l'Analyse et à la Géométrie le grand développement qu'elles ont pris depuis Descartes, Newton et Leibnitz présentaient, si merveilleux qu'ils fussent, une même faiblesse. La représentation des figures par les nombres, leur décomposition en éléments infiniment petits éclairent assurément d'une

vive lumière les problèmes que nous pouvons nous poser sur ces figures ; elles en masquent néanmoins une propriété essentielle.

L'influence de cette dernière peut, d'ailleurs, être plus ou moins capitale ; les modifications qu'elle entraîne dans les résultats, plus ou moins importantes ; et nous pouvions conserver un doute sur cette importance. Nous avons rencontré un exemple où ces modifications sont radicales et absolues, où les propriétés topologiques suffisent, à elles seules, et toutes choses parfaitement égales d'ailleurs, à changer la solution du tout au tout. Nous savons également, depuis Riemann, que cet élément géométrique, sans lequel la synthèse des données recueillies par l'Analyse risque de s'égarer, ne joue pas un rôle moins fondamental dans l'étude des fonctions algébriques. [Hadamard 1909b 822]

Si, *après coup*, une réflexion sur les limites des outils classiques permet de comprendre le rôle et la nécessité d'une science de la forme, ce sont les exemples qui font d'abord sentir ce rôle et cette nécessité. A cet égard, tous les exemples ne parlent pas aussi clair : la théorie riemannienne des fonctions d'une variable complexe est, en un sens, trop compliquée, trop riche d'éléments de toute nature. L'exemple de l'inversion est à la fois plus « petit » et plus pur, seul l'élément topologique global variant d'un cas à l'autre. Il est aussi, mais Hadamard ne le souligne pas ici, un exemple où le rôle de la topologie globale se manifeste dans un problème dont la forme est celle du passage du local au global, forme qui n'était pas si aisément isolable dans la théorie riemannienne. La fin de la Leçon inaugurale de Hadamard est, construction classique, consacrée à l'évocation du rôle à venir de l'*Analysis situs* dans différentes questions mathématiques, en particulier dans celles qu'il aura à traiter :

(…) le rôle des notions topologiques actuelles, sous la forme que nous leur connaissons, ne semble pas près d'être terminé. La lacune qu'elles comblent avait arrêté une première fois la marche de la science. Mais on ne devait pas s'attendre à ne les rencontrer que dans un seul cas. De fait, la liste des problèmes où elles interviennent s'allonge tous les jours. [Hadamard 1909b 825]

Sont évoquées très brièvement les questions de fondement de la géométrie, des questions d'hydrodynamique et d'élasticité. Hadamard place ensuite son travail à venir sur les équations de la Dynamique, chaire de Mécanique analytique et céleste oblige, sous les auspices de Poincaré, pionnier de la théorie qualitative des équations différentielles dans le domaine réel :

La nature du problème ne nous laisse plus le choix des moyens. L'infiniment petit est ainsi la donnée unique mise à nôtre disposition, et il ne peut être question pour nous de prendre un autre point de départ. Dès lors, il est clair que cette synthèse des fragments

> successifs qui nous avait déjà préoccupés, devient pour nous une question plus capitale encore que précédemment. C'est ce que les travaux de M. Poincaré ont établi. Ils n'ont résolu la question que dans certains cas ; on n'a cependant plus le droit de douter, après eux, qu'il n'existe une théorie des courbes définies par une équation différentielle sur une surface de genre zéro ; une autre – dont il est à peine exagéré de dire qu'elle est sans rapport avec la première – sur une surface de genre un ; et ainsi de suite. [Hadamard 1909b 826]

Tous ces éléments seront repris en 1912, développés dans une analyse plus épistémologique, et enrichis d'un regard portant sur l'ensemble des mathématiques, en particulier englobant la théorie des équations aux dérivées partielles.

Une dernière remarque avant de passer à l'analyse de l'œuvre de Poincaré. Dans la période 1909-1912 l'intérêt de Hadamard pour l'*Analysis situs* trouve un écho dans deux textes. Premièrement un article publié dans les Nouvelles Annales de Mathématiques, intitulé *Notions élémentaires de géométrie de situation* [Hadamard 1909a]. Le contenu en est, en effet, élémentaire et consiste en une présentation de la topologie des surfaces qu'on aurait quasiment pu lire sous la plume de Riemann, si ce n'est pour l'évocation des surfaces unilatères (i.e. non orientables) et le lien avec les décompositions polyédrales et la formule d'Euler. Le deuxième texte est d'une autre ambition. Publié en appendice à l'occasion, en 1910, de la seconde édition du manuel d'Analyse de Tannery, il s'intitule *Sur quelques applications de l'indice de Kronecker*[Hadamard 1910b]. Un appendice sur un sujet aussi complexe pour un manuel d'Analyse élémentaire pourrait surprendre, mais Picard avait déjà choisi de faire jouer dans son manuel un rôle important à l'indice d'un point par rapport à une courbe et à sa généralisation, Tannery ne fait donc que suivre un mouvement (provisoire) d'intégration des propriétés de l'indice de Kronecker dans les connaissances fondamentales en Analyse. Dans ce texte, Hadamard commence par rappeler les propriétés des courbes planes, théorème de Jordan en tête, en utilisant l'ordre d'un point par rapport à une courbe. Le passage aux dimensions supérieures est fait avec grand soin, en particulier dans la définition des sous-variétés sur un mode mixte combinatoire et ensembliste. Si la formule de Green est utilisée sans avoir été redémontrée, elle sert à définir et étudier les propriétés successivement de l'ordre d'un point par rapport à une hypersurface puis de l'indice d'une distribution vectorielle sur une hypersurface. Le lien entre cet indice et les singularités de la distribution dans le volume bordé par la surface est établi, ainsi que le théorème de Poincaré-Bohl. L'appendice s'achève sur le lien avec la topologie avec en particulier une démonstration du « théorème de Schoenflies » - analogue *n*-dimensionnel du théorème de Jordan pour les courbes planes – et de l'invariance topologique, pour les sous-variétés de dimension paire, de la somme des indices des singularités d'un champ de vecteurs tangents. Cet appendice de Hadamard sera en 1912 le principal point d'appui du célèbre texte de Brouwer *Über die Abbildung von Mannigfaltigkeiten* [Brouwer 1912a]. Il importe de souligner que dans ces deux textes, de contenu et d'ambition fort différents, on ne trouve aucun écho des réflexions épistémologiques sur les limites du Calcul infinitésimal ou le rôle de l'*Analysis situs* comme outil de synthèse : chez Hadamard la barrière de *genre* semble très forte, certains commentaires, certains termes ne trouvent pas leur place dans les stricts exposés mathématiques. Les réflexions sur le local et le global relèvent d'un registre épistémologique plus que d'un niveau *méta*, elles ne s'intègrent pas au corps du texte démonstratif. A cet égard, l'usage en 1906 de termes comme « localement » ou « local » fait plutôt figure d'exception.

III. L'analyse de l'œuvre mathématique de Poincaré.

A la mort de Poincaré, en 1912, Mittag-Leffler demande à des mathématiciens de contribuer à un numéro spécial d'*Acta Mathematica*, hommage posthume et présentation de l'œuvre ; les délais en retardent la parution jusqu'en 1921. Avec ses quatre-vingts pages, la contribution de Jacques Hadamard [Hadamard 1912] est de loin la plus importante. Ce texte nous intéresse au premier chef par sa reprise et son développement des thèmes introduits dans la Leçon de 1909 dans un contexte encore plus vaste que celui, vaste déjà, d'alors : le parcours de l'œuvre mathématique de Poincaré amène à embrasser quasiment toutes les branches des mathématiques et non plus « seulement » la théorie des fonctions algébriques d'une variable complexe, les théorèmes d'inversions et l'étude qualitative des courbes définies par une équation différentielle. De plus, s'il pouvait sembler naturel – mais on a vu toute l'historicité de cette « nature » – d'introduire une série de Leçons sur le rôle de l'*Analysis situs* dans l'étude des équations de la dynamique en insistant sur le rôle de la forme et les difficultés de passage du local au global, ce dernier thème s'impose sans doute moins à qui veut présenter l'œuvre de Poincaré ; il ne s'était d'ailleurs *pas imposé à Poincaré* dans la présentation de son Œuvre de 1901. On mesure donc toute la spécificité du choix que fait Hadamard non seulement de reprendre ce thème mais – nous voudrions le montrer – d'en faire l'élément épistémologique majeur, l'outil de lecture principal de l'état des mathématiques telles que Poincaré les laisse en 1912. Nous procéderons en citant assez longuement six passages du texte de Hadamard, en visant, comme pour la lecture du *Lehrbuch* d'Osgood, l'exhaustivité dans le relevé des apparitions des termes et des thèmes liés au couple local/global.

1. Un schéma triple.

Hadamard partage son analyse en trois parties, consacrées respectivement à la théorie des fonctions, aux équations différentielles, enfin aux équations aux dérivées partielles et problèmes de la Physique mathématique. L'ensemble est précédé d'une brève introduction où, après avoir souligné l'universalité de l'œuvre de Poincaré, Hadamard introduit le thème épistémologique principal appelé à devenir le *leitmotiv* du texte :

> L'histoire de l'œuvre de Poincaré ne sera donc, au fond, autre chose que l'histoire de la science mathématique et des problèmes qu'elle s'est posés à notre époque.
>
> Le plus important d'entre eux est encore aujourd'hui le même qui est apparu à la suite de l'invention du Calcul infinitésimal.
>
> Nous sommes loin d'avoir résolu les difficultés qu'il présente. Mais là même où nous y sommes arrivés, ce n'a été, le plus souvent, qu'en modifiant profondément nos idées sur ce qu'il faut entendre par « solution ». Celles que nous avons acquises aujourd'hui se résument toutes dans la forte parole que Poincaré prononçait en 1908 :
>
> « Il n'y a plus de problèmes qui sont résolus et d'autres qui ne le sont pas, il y a seulement des problèmes *plus ou moins* résolus » ,– c'est-à-dire qu'il y a des solutions donnant lieu à des calculs plus ou moins simples, nous renseignant plus ou moins directement et aussi plus ou moins complètement sur l'objet de notre étude.
>
> On peut dire à ce point de vue qu'une première solution est acquise dans la plupart des cas,- et cette conquête, ébauchée dès Newton, est surtout l'œuvre de Cauchy et de Weierstrass : – des relations entre états *infiniment* voisins, on sait déduire, ce qui est fort différent, la connaissance de tous les états *suffisamment voisins* d'un état donné. Si, par exemple, le phénomène à étudier dépend de la position d'un point dans un plan, on sait l'étudier dans toute une petite région entourant un point quelconque donné.
>
> En un certain sens, il peut être ainsi considéré comme connu, puisque, avec de petites régions de cette espèce accolées les unes aux autres, on peut constituer des régions plus étendues et même aussi étendues qu'on le voudra.
>
> Mais cette connaissance est souvent très insuffisante, beaucoup plus encore que ne le serait, pour voyager d'un bout à l'autre d'un pays, la possession des feuilles partielles de la carte à quelqu'un qui ne disposerait d'aucune autre donnée géographique. (…)

> Quoi qu'il en soit, ces premiers résultats, même si l'on est pas réduit à s'en contenter servent tout au moins d'intermédiaires obligés pour en obtenir de meilleurs, de sorte que, presque partout, la marche de la science mathématique actuelle comporte deux étapes :
>
> La solution locale des problèmes ;
>
> Le passage de celle-ci à une solution d'ensemble, si cette sorte de synthèse est possible. [Hadamard 1912 1922]

Après avoir lu le texte de 1909 on n'est pas surpris par le contenu de ce passage, quoique la portée en soit plus générale (« la science mathématique ») et les articulations plus explicites, avec en particulier le retour du terme « local », utilisé en 1906 mais pas en 1909. On notera qu'ici l'image des cartes à coordonner renvoie moins à une description des variétés par collection de paramétrages partiels qu'aux problèmes de prolongement analytique de solutions d'une équation différentielle ou de recollement d'éléments de fonctions tel que Poincaré le rencontre dans son extension à deux variables du théorème de représentation des fonctions méromorphes comme quotient de fonctions entières. Un point mérite une attention plus particulière, celui relatif à l'articulation entre l'infinitésimal et le local. En 1909, dans ses remarques sur le Calcul infinitésimal, Hadamard insistait sur le lien entre les deux, sur le caractère inexorablement local de l'infinitésimal : « celui-ci prend pour base la connaissance d'une petite région du domaine proposé » [Hadamard 1909b 820]. En 1912 c'est au contraire la distance qui sépare l'infiniment voisin du suffisamment voisin qui est soulignée, dessinant une classe autonome de théorèmes, ceux de passage de l'infinitésimal au local ; aucun exemple n'est ici donné mais on ne trahit pas Hadamard en évoquant l'inversion locale ou les théorèmes locaux d'existence pour les équations différentielles ordinaires. Cette distinction est reprise plus loin dans un contexte à la fois particulier et complexe, celui de la théorie qualitative des systèmes dynamiques :

> Par ces exposants caractéristiques se trouveront ainsi définies les principales relations entre une solution périodique et les solutions infiniment voisines. (…) Cette étude prépare celle des courbes intégrales *suffisamment* (et non plus infiniment) voisines de la courbe fermée donnée. [Hadamard 1912 1968]

Ainsi le passage inaugural du texte de Hadamard introduit-il un schéma épistémologique en deux étapes et trois niveaux : passage de l'infinitésimal au local, passage du local au non-local ; ce dernier niveau étant lui-même décrit dans les mêmes termes qu'en 1909 : solution d'ensemble, démarche de synthèse. C'est ce nouveau schéma (infinitésimal, local, global) que nous désignions comme le schéma triple.

On peut d'ores et déjà faire quelques comparaisons avec le couple *im Kleinen* / *im Großen* d'Osgood. Ce couple reçoit chez Osgood une définition reposant sur la pratique de l'écriture d'expressions quantifiées et la symétrie de ces définitions mêmes enferme dans la forme du couple. Hadamard ne définit pas mais s'appuie sur la notion de local bien identifiée en 1912 comme ce qui est relatif à un voisinage ; par contrecoup, le non-local est moins aisément définissable et, de fait, deux types de non-local se présentent : l'infinitésimal comme moins que local, et le plus que local. Couple chez Osgood, triplet chez Hadamard. On peut penser que la prédominance des problèmes d'analyse complexe chez Osgood l'invite moins à insister sur l'autonomie de l'infinitésimal ; on notait d'ailleurs dans le *Lehrbuch* le refus systématique d'utiliser tout terme relatif à l'infiniment petit, bien conforme aux canons de la nouvelle analyse. Les textes ne sont pas non plus de même nature : Hadamard montre comment Poincaré a su embrasser la complexité de l'univers mathématique, Osgood propose une progression idéale du simple au complexe. Deux facettes différentes du travail du mathématicien sont en jeu dans ces deux textes : s'orienter par la pensée dans un monde de problèmes plus ou moins résolus, d'un côté ; écrire juste, de l'autre.

Deux autres points de comparaison se présentent. Premièrement, le couple *im Kleinen* / *im Großen* renvoie à des types de domaines ou, plus précisément, à un type de dépendance entre domaines dans un énoncé ; chez Hadamard, par contre, on renvoie moins à des domaines qu'à des niveaux de problèmes et de solutions. Ainsi pour le plus-que-local Hadamard ne parle-t-il pas de solution *dans* un domaine donné au départ, ce qui correspondrait au *im Großen* d'Osgood, mais de « solution d'ensemble » : l'accent est mis sur le type de solution, le lien avec le domaine, bien que sous-jacent, reste à l'arrière-plan. Cette distinction entre un commentaire *embedded* chez Osgood et de nature plus conceptuel chez Hadamard peut aussi contribuer à expliquer le rôle différent de l'infinitésimal : faute d'un lieu propre, il est exclu par les canons d'une écriture ensembliste, du moins comme niveau autonome ; cette absence de lieu propre n'est pas un obstacle pour Hadamard. Dernier point de comparaison, Hadamard introduit le terme de « passage » dont on n'a pas l'équivalent chez Osgood. Chez ce dernier l'opposition est plutôt statique, des théorèmes *im Kleinen* et *im Großen* se répondent sans que l'un découle nécessairement de l'autre : opposition de forme et non génération ; Hadamard insiste au contraire sur l'aspect dynamique de dépassement de l'infinitésimal vers le local, puis de dépassement du local. On verra dans la suite du texte qu'il tend même à réserver les rappels du thème épistémologique principal aux cas où le résultat global procède du résultat local, comme dans le cas de la deuxième démonstration du théorème d'inversion globale en 1906.

2. Une épistémologie des problèmes.

Après l'introduction, on trouve deux passages dans le texte de Hadamard où le thème du dépassement du local est repris à propos de problèmes particuliers, les deux dans la partie consacrée à la théorie générale des fonctions (par opposition aux fonctions spéciales, en l'occurrence fuchsiennes). C'est d'abord l'article de 1883 *Sur les fonctions de deux variables* qui est présenté ainsi :

> L'étude des fonctions de plusieurs variables ne fut véritablement inaugurée que lorsque (…) Poincaré réussit à leur étendre le théorème de Weierstrass sur les fonctions *méromorphes*.
>
> Quel que soit le nombre des variables, une telle fonction est caractérisée par la propriété de se comporter au voisinage d'un point quelconque – autrement dit, *localement* – comme une fonction rationnelle. Localement donc, elle s'exprime par le quotient de deux séries entières convergentes dans un rayon suffisamment petit. C'est ce résultat qu'il s'agit d'étendre à tout l'espace en exprimant la fonction considérée par le quotient de deux séries entières *toujours* convergentes. [Hadamard 1912 1945]

Après avoir présenté le lien avec la théorie du potentiel, plus caché dans le cas des fonctions de plusieurs variables complexes, Hadamard résume l'idée de la démonstration :

> Quant à la formation du potentiel en question, elle consiste en une sorte de raccordement analytique entre plusieurs fonctions (les logarithmes des dénominateurs des diverses fractions qui représentent localement la fonction donnée) définies chacune dans une portion d'espace, mais dont les différences mutuelles dans les régions où deux d'entre elles existent à la fois, sont régulières. (…) Il s'agit enfin de passer à la limite pour le cas de l'espace indéfini en tous sens, la méthode à appliquer est connue : c'est celle par laquelle on démontre le théorème de M. Mittag-Leffler sur le développement des fonctions méromorphes d'une variable en série d'éléments simples. [Hadamard 1912 1946]

Quelques lignes plus loin Hadamard aborde, toujours dans la partie consacrée aux fonctions de plusieurs variables, le cas de la représentation conforme :

> Ce vaste domaine des fonctions de plusieurs variables devait, plus tard, offrir encore à Poincaré un autre objet de méditation. La *représentation conforme* offre, dès le cas

> d'une variable, un remarquable exemple de la différence qui existe entre les propriétés *locales* des fonctions et celles qui interviennent lorsqu'on les considère non plus au voisinage immédiat d'un point, mais dans tout leur domaine d'existence.
>
> Le problème (problème *local*) qui consiste à représenter, par l'intermédiaire d'une fonction analytique, un *arc* (suffisamment petit) d'une courbe donnée *c* sur un arc d'une autre courbe donnée C a, en effet, une infinité de solutions dépendant d'une infinité d'arbitraires, tandis que le problème *étendu* qui consiste à représenter, dans les mêmes conditions, la courbe fermée *c tout entière*, sur la courbe fermée C (et l'aire *s* limitée par *c* sur l'aire *S* limitées par C) est, au contraire, déterminé à une substitution homographique près. [Hadamard 19121948]

Cette formulation du problème à une variable permet ensuite de comprendre les difficultés spécifiques intervenant lors du passage à deux variables et l'introduction par Poincaré, entre le problème local et le problème étendu, d'un problème intermédiaire relatif à la représentation conforme d'un voisinage de toute la frontière. Dans les deux cas l'intégration de ces exemples au répertoire des problèmes illustrant des passages du local au global ne surprend pas. Dans le deuxième cas c'est strictement la formulation de Poincaré qui est reprise, dans le premier cas le problème était déjà clairement posé ainsi par Poincaré sans toutefois qu'il n'utilise alors « local » ou « localement ». Au niveau du vocabulaire on ajoute à la liste des formes d'expression du global contenant déjà « solution d'ensemble » et « synthèse », le « toujours convergent » et le « domaine entier d'existence » d'une fonction. Ces formulations sont toujours un peu vagues et nécessitent le contexte pour être entendues. Pour « toujours convergent » le contexte renvoie à la notion classique de fonction entière : comme de coutume, l'espace $\mathbf{C}^n$ n'a pas à être désigné comme un espace particulier, il est implicitement l'espace de travail lorsque les variables sont complexes. Il est vrai que l'erreur de Cousin n'a pas encore été mise au jour par Osgood et que cette question de la représentation des fonctions méromorphes ne semble pas propice à illustrer le rôle des spécificités des différents domaines. Quant au « domaine entier d'existence » il inviterait, hors contexte, à penser au domaine d'holomorphie ; or il n'en est rien, la structure du problème étant même inverse : dans la représentation conforme il s'agit d'associer des fonctions à un domaine donné et non le contraire. Ici la précision des définitions d'Osgood fait défaut et seul le contexte permet d'interpréter correctement la formulation initiale. Une remarque encore sur le vocabulaire : le terme de recouvrement ne semble pas encore disponible en 1912 pour décrire la situation où des « portions d'espace » recouvrent l'espace en empiétant les unes sur les autres ; ni « recouvrement » ni d'ailleurs aucun autre terme.

Contrairement aux deux passages que nous venons de citer, le quatrième passage n'est pas consacré à la démonstration d'un théorème particulier mais est l'introduction générale de la deuxième partie du texte, consacrée aux travaux de Poincaré en théorie des équations différentielles.

> Le centre de la mathématique moderne est, nous l'avons dit, dans la théorie des équations différentielles et aux dérivées partielles.
>
> Il nous faut montrer Poincaré aux prises avec ce double problème et tout d'abord, avec les équations différentielles.
>
> La place n'est point de celles qu'on puisse emporter de haute lutte ; il faut l'attaquer successivement sur toute sorte de points et se contenter d'avantages partiels. Essayons d'énumérer les directions à suivre.
>
> I. On peut se préoccuper de perfectionner (spécialement autour des points singuliers) l'étude que nous avons appelée *locale* des solutions.
>
> II. Il faut, d'autre part, savoir découvrir les cas où celles-ci s'expriment à l'aide de fonctions connues. (…)
>
> III. A défaut de fonctions déjà existantes, il peut arriver que certaines transcendantes nouvelles, douées de propriétés qui en permettent l'étude et le calcul, gouvernent, d'autre part, une catégorie étendue d'équations différentielles dont elles permettent d'exprimer les intégrales.
>
> IV. On peut étudier les solutions, supposées analytiques, au point de vue de la Théorie des fonctions (…)
>
> V. On peut essayer de substituer, dans le cas général, aux développements en série qui conviennent localement, des développements de forme différente valables pour toutes les valeurs de la variable etc. [Hadamard 1912 1954]

Précisons qu'il s'agit ici de la liste de ce que Hadamard nomme les « voies classiques » en théorie des équations différentielles, par oppositions à la théorie qualitative inaugurée par Poincaré. Ce passage fait bien écho au passage de l'introduction sur le thème de la multiplicité des voies d'approche, chacune n'apportant qu'une lumière partielle sur le problème. Ici toutefois, l'exposé des différentes stratégies d'attaque relève plutôt du listage des stratégies observées que du développement nécessaire d'une articulation conceptuelle telle infinitésimal / local / global : Hadamard, observateur cultivé plus qu'épistémologue. Un élément un peu plus surprenant intervient toutefois quelques lignes plus loin, dans le développement du premier point consacré aux perfectionnements de l'étude locale des solutions.

> Une autre question qui, bien qu'appartenant à cette première catégorie des études locales, soulève de sérieuses difficultés, non encore complètement surmontées, est le calcul des intégrales irrégulières des équations linéaires (…).[Hadamard 1912 1955]

Les développements obtenus sont alors en effet divergents ; en utilisant la transformation de Laplace, Poincaré montre la signification de ces développements divergents. Hadamard ne se contente pas de présenter ce résultat, il prend un pas de recul pour entrer dans le commentaire épistémologique :

> Sur un point, – la recherche de la limite vers laquelle tend la dérivée logarithmique de la solution – la méthode employée se rapproche beaucoup de celles que nous retrouverons plus loin à propos de l'étude, non plus locale, mais générale du problème des équations différentielles ; et dans le fait que la question dont nous parlons en ce moment n'est « locale » qu'en apparence réside sans doute la véritable raison des grandes difficultés de cette question qui mériterait encore tant de nouvelles recherches. [Hadamard 1912 1955]

Au niveau du vocabulaire on fait bien sûr entrer « étude générale » dans la liste des termes faisant couple avec le local mais, plus important, on observe un nouveau type d'emploi de ce couple. Tel qu'il était décrit dans l'introduction, le schéma de passage de l'infinitésimal au local puis de dépassement du local était conceptuellement simple ; les deux exemples présentés jusqu'ici, représentation des fonctions méromorphes de deux variables et représentation conforme à deux variables, illustraient exactement le passage du local au global : le problème mathématique était ardu mais le schéma épistémologique simple ; c'est même justement parce que passer du local au global est une forme générale et simple de problèmes *difficiles* qu'en relever pour un problème le marque *a priori* d'un sceau de difficulté. Ici c'est le schéma épistémologique lui-même qui se complexifie en s'enrichissant de la catégorie du « local en apparence » : le caractère local ou non d'un problème n'est pas toujours identifiable immédiatement ; plus précisément, un problème qui se présente comme local peut ne pas l'être, comme le montrent sa difficulté et la nature des méthodes à employer pour le résoudre. Ici aussi se manifeste la différence d'approche entre Hadamard et Osgood : *im Kleinen* / *im Großen* qualifie des *énoncés*, un critère syntaxique est donc possible. Chez Hadamard, « local », « d'ensemble », « de synthèse » etc. servent à décrire des *problèmes*, à cerner leur nature et leur complexité ; partant, le dépliement progressif des différents aspects du problème, le patient travail du mathématicien, l'introduction inattendue d'un nouveau point de vue … sont toujours susceptibles de faire évoluer la place d'un même problème ou d'une même solution sur l'axe qui va du local au global. L'exemple exposé ici peut sembler très particulier, mais on verra ce thème du « local en apparence » repris et un peu plus développé à propos des équations aux dérivées partielles, dans la dernière partie du texte. Avant de passer au dernier passage consacré explicitement à local / global, présentons un autre usage complexe de ce schéma. A propos de la théorie qualitative des équations différentielles du second ordre, Hadamard revient sur l'importance des solutions périodiques :

> (…) c'est à Poincaré qu'il appartient d'avoir montré dans les solutions périodiques un instrument, l'un des plus puissant dont on dispose, pour la recherche et l'étude des autres solutions.
>
> Que les solutions périodiques soient capables de jouer ce rôle capital, c'est ce que, d'après les réflexions qui précèdent, nous pouvons faire comprendre d'un mot. Une courbe intégrale fermée déterminée étant supposée connue, Poincaré considère toutes les courbes intégrales voisines de celle-là.
>
> On voit immédiatement qu'une telle question est à cheval sur les deux points de vue entre lesquels pivote toute la théorie des équations différentielles ; et cela en combinant les avantages de toutes deux. Accessible aux mêmes procédés qui s'appliquent au domaine local, elle est d'emblée cependant en dehors de ce domaine, puisque les nouvelles trajectoires obtenues n'évoluent nullement au voisinage d'un point unique et sont étudiées sur des parcours aussi étendus que la solution périodique primitive elle-même. [Hadamard 1912 1967]

Ainsi, non seulement des problèmes peuvent-ils n'être locaux qu'en apparence, mais encore des questions peuvent être « à cheval » entre le local et le global.

Avant d'en arriver aux équations aux dérivées partielles, Hadamard poursuit sur les équations différentielles en passant des « voies classiques » à la « théorie qualitative ». Un peu curieusement, il semble tout d'abord ignorer le lien entre perspective qualitative et saisie globale ; en effet, pour introduire le point de vue qualitatif, Hadamard cite longuement la description que Poincaré en donnait lui-même dans l'introduction du premier article sur les courbes définies par une équation différentielle, mais en omettant de citer précisément le passage dans lequel le thème du passage du local au global est explicite chez Poincaré ; rappelons-le :

> Rechercher quelles sont les propriétés des équations différentielles est donc une question du plus haut intérêt. On a déjà fait un premier pas dans cette voie en étudiant la fonction proposée *dans le voisinage d'un des points du plan*. Il s'agit aujourd'hui d'aller plus loin et d'étudier cette fonction *dans toute l'étendue du plan*. [Poincaré 1881 3]

Hadamard présente ensuite assez longuement le contenu de ce premier Mémoire en insistant particulièrement sur la nouveauté consistant à faire porter l'étude sur la totalité des courbes intégrales. Curieusement, encore, la contrainte globale mise au jour par Poincaré, reliant le nombre de cols, de foyers et de nœuds n'est évoquée qu'en passant ; après avoir introduit l'indice d'un cycle comme variation d'un argument, Hadamard signale :

> La manière dont varie, le long d'une courbe fermée quelconque, le sens dont il s'agit, est d'ailleurs liée à la disposition et à la nature des points singuliers de l'équation par une relation simple qui est d'un grand secours dans les discussions dont nous venons de parler et que Poincaré retrouvera lorsqu'il passera aux équations d'ordre supérieur. [Hadamard 1912 1964]

Il ne semble pas y avoir dans cette « relation simple » un exemple frappant à ajouter au répertoire des exemples reliés au thème principal ; il ne semble pas y avoir besoin de souligner l'intérêt des démarches procédant par décomposition cellulaire pour relier des aspects analytiques locaux, ici les singularités de l'équation, et des aspects topologiques globaux saisis par la formule d'Euler. Sans vouloir sur-interpréter cette discrétion de Hadamard, qui tient peut-être seulement à la construction de son exposé, on peut faire deux remarques. Tout d'abord, l'absence d'un terme stable à opposer à « local » rend moins accessible une présentation simple et frappante de cette relation : en 1933, Struik peut y voir un exemple de relation « *in the large* », mais on voit mal Hadamard parler de relation « d'ensemble » ou « générale », encore moins « de synthèse », d'autant plus qu'il qualifie ainsi des problèmes ou des solutions et non des énoncés ou des relations numériques. Ensuite, les exemples que Hadamard choisit pour illustrer le passage du local au global ont deux caractères communs dont ne relève pas la relation C-F+N = 2p-2. Dans ces exemples, les situations locales sont indiscernables – pas de points singuliers donc –, et le passage du local au global prend la forme d'un prolongement de proche en proche le long d'une courbe ou d'une surface, ou au moins d'une « sorte de raccordement analytique » [Hadamard 1912 1945] : ces traits sont communs à l'inversion globale telle qu'elle est traitée en 1906 (mais pas reprise par Hadamard dans son analyse de l'œuvre de Poincaré), à la représentation des fonctions méromorphes de deux variables et à la représentation conforme à deux variables ; on les retrouve aussi dans les deux passages d'exposition générale du thème, celui de l'introduction et celui présenté ci-dessous. Décomposition cellulaire associée aux singularités, voilà des traits qui placent sans doute cet exemple un peu à côté de ce que Hadamard entend par dépassement du local.

Après avoir introduit la notion d'étude qualitative et présenté le premier Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, Hadamard reprend le thème général dans le dernier des passages qui lui est spécifiquement consacré :

> Les résultats précédents ne subsistent pas pour toutes les équations du premier ordre et de degré supérieur au premier en $\frac{dy}{dx}$; mais ils s'étendent cependant d'eux-mêmes à un grand nombre d'entre elles.
>
> Ce n'est pas, en effet, le degré qui joue ici le rôle essentiel : Poincaré rencontre une notion qui était apparue une première fois dans la science avec Riemann, mais dont les recherches que nous résumons en ce moment devaient montrer la véritable signification. C'est la *géométrie de situation*, la science des propriétés géométriques qui ne changent pas quelles que soient les déformations subies par une figure, pourvu qu'il n'y intervienne ni déchirure ni soudure.
>
> Tant que l'on se borne au point de vue local, rien ne fait prévoir la nécessité d'une pareille étude. Sinon toutes les figures que les géomètres ont pu imaginer, du moins toutes celles dont ils se sont servis effectivement soit pour les étudier en elles-mêmes soit pour représenter des relations analytiques, sont identiques entre elles au point de vue de la géométrie de situation lorsqu'on se borne à les considérer dans leurs portions suffisamment petites, pourvu qu'elles aient simplement le même nombre de dimensions : par exemple, toute portion suffisamment restreinte de surface quelconque peut être remplacée à ce point de vue par un petit disque circulaire.
>
> Aussi cette découverte est-elle de celles qui se firent le plus attendre. La théorie des fonctions algébriques, à laquelle elle est indispensable, avait été inlassablement étudiée et perfectionnée avant que la nécessité en fût apparue : cette nécessité avait échappé à Cauchy lui-même.
>
> Puis, lorsqu'à cette occasion, Riemann l'eut mise en évidence d'une manière éclatante, ses successeurs ne virent point que la portée de ce principe n'était pas limitée à la circonstance particulière qui l'avait fait apparaître.
>
> Mais, après le second exemple fourni par Poincaré, cette portée est clairement établie. Elle est indissolublement liée à ce passage du local au général qui est la grande préoccupation du Calcul infinitésimal. Dans tout passage de cette nature, on peut s'attendre à voir la géométrie de situation jouer son rôle. [Hadamard 1912 1864]

A objectif identique, arguments identiques : il s'agit ici, comme dans la Leçon inaugurale de 1909, de faire sentir la nécessité de l'*Analysis situs*. Si le survol historique est le même, les raisons du « manque à regarder » sont un peu plus développées : l'*ablépsie* dérive de l'*indiscernabilité* locale des variétés, masquant le rôle de l'*Analysis situs* pour qui aborde l'Analyse d'un point de vue universellement local. Cette illusion du point de vue universellement local, Hadamard y faisait déjà allusion dans le passage introductif : « Si, par exemple, le phénomène à étudier dépend de la position d'un point dans un plan, on sait l'étudier dans toute une petite région entourant un point quelconque donné. *En un certain sens*[2] , il peut être ainsi considéré connu (…) ». Un point mérite d'être ici souligné, qui nous permettra de saisir une différence fondamentale, non plus entre Hadamard et Osgood, mais entre Hadamard et Weyl. Le thème de l'indiscernabilité locale des variétés (de même dimension) peut être développé dans deux directions : on peut, premièrement, opposer à cette indiscernabilité locale les radicales différences globales et insister sur ce qui isole chaque variété, fait de chacune un univers en soi. C'est la voie que choisissait très clairement Hadamard dès 1909, passant de la théorie des courbes définies par une équation différentielle sur les variétés de genre 0 à celles sur les surfaces de genre 1 et décrivant cette dernière comme une théorie « dont il est à peine exagéré de dire qu'elle est sans rapport avec la première » ; c'est la voie qu'il emprunte de nouveau en 1912. On peut, autre voie, introduire la notion de revêtement d'une variété et insister sur le *lien* naturel qu'une variété donnée entretient avec certaines autres. Il est frappant de constater que, non seulement cette notion de revêtement n'est pas évoquée ici, mais qu'elle ne l'est nulle part dans l'analyse que Hadamard propose de l'œuvre de Poincaré. Ainsi présente-t-il ainsi la démonstration de 1883 du théorème d'uniformisation des fonctions analytiques $z = f(x)$:

> D'une part, tout le calcul va reposer sur la formation d'un domaine géométrique, la surface de Riemann, par lequel on peut se représenter les variations simultanées des z et de x. En second lieu, un élément physico-mathématique, la théorie du potentiel, joue dans ce calcul le rôle principal. [Hadamard 1912 1943]

Aucun commentaire ni sur le mode de construction ni sur la spécificité topologique, la simple connexité, de cette surface rapidement étiquetée « de Riemann ». Pour ce qui est de la démonstration de 1907 le travail explicite de Poincaré sur les revêtements, et non plus seulement le revêtement universel, ne trouve aucun écho sous la plume de Hadamard. Ce dernier ne commente que les progrès de la théorie du potentiel, en particulier la méthode de balayage. Lorsqu'il rend compte des Mémoires de Poincaré sur l'*Analysis situs*, le lien entre action de groupe et groupe fondamental de l'espace quotient n'est pas souligné. Cette absence est d'autant plus surprenante de la part du mathématicien qui évoquait en 1909 le jeu de

[2] C'est moi qui souligne

construction d'espaces appropriés au traitement d'un problème : la notion de revêtement universel en fournissait un exemple que Hadamard ne saisit pas. Il reviendra à Hermann Weyl, entre autres, d'en saisir l'importance, en théorie des surfaces de Riemann puis, dans les années vingt, en théorie des groupes de Lie.

3. Dépassement du local *vs* niveau global.

Le dernier long passage à commenter est l'introduction de la troisième partie, consacrée aux équations aux dérivées partielles et aux problèmes de la physique mathématique. Après une quarantaine de pages consacrées aux équations différentielles ordinaires, il s'agit pour Hadamard de dégager les spécificités des problèmes d'équations aux dérivées partielles.

> Les difficultés que ceux-ci présentent peuvent être, suivant les cas, de nature très différente.
>
> Il peut arriver qu'elles ressemblent, avec des différences de degré, à ce qu'elles sont pour les équations différentielles, de sorte que la solution puisse être considérée, au point de vue théorique, comme fournie localement par les méthodes de Cauchy, quitte, dans une seconde partie du travail, à faire la synthèse des différents éléments de solution ainsi obtenus.
>
> C'est ce qui se passe – l'équation étant supposée introduite par l'étude d'un phénomène physique – lorsque celui-ci se déroule librement dans l'espace illimité et où, par conséquent, et pour définir son évolution, il suffit de se donner les *conditions initiales*, c'est-à-dire son état à un instant déterminé.
>
> Mais si le phénomène a pour théâtre une enceinte limitée par des parois – de sorte que pour achever de le définir, il faut écrire un système de *conditions aux limites*, exprimant le rôle joué par les parois en question, – une difficulté d'un tout autre ordre apparaît.
>
> Il est encore vrai que, au voisinage d'un point quelconque, la solution est le plus souvent représentable par des développements en série du même type que dans les problèmes précédents. Mais cette fois, aucun de ces *éléments* de solution, – non pas même le premier, comme il arrivait pour les équations différentielles ordinaires – ne peut être déterminé isolément : la connaissance de chacun d'eux est inséparable de celle de *tous* les autres.
>
> C'est ce renversement du principe même qui, en toutes les autres circonstances, guide la marche du calcul intégral : la division de la difficulté en une difficulté locale et une

> difficulté de synthèse. Une telle division est ici radicalement impossible. [Hadamard 1912 1996]

Hadamard présente ensuite le cas fondamental du problème de Dirichlet puis revient à l'œuvre de Poincaré avant de conclure l'introduction générale de la partie.

> La nouvelle solution qu'il y apporta, la méthode du *balayage*, s'inspire très directement de la nature même de la question, de cette interdépendance mutuelle de toutes les parties de la solution telle que nous venons de la signaler.
>
> Mais alors que la méthode du balayage elle-même se rattache aux autres travaux antérieurs consacrés à la théorie du problème de Dirichlet, cette théorie devait peu après entrer dans une phase toute nouvelle et subir une révolution profonde dont l'utilité ressort, elle aussi, des remarques précédentes.
>
> Son principe consiste à remplacer l'équation *aux dérivées partielles*, ainsi que les autres conditions auxquelles doit satisfaire la fonction inconnue, par une équation *intégrale*. Au lieu de faire figurer l'inconnue sous des signes de dérivation, on la fait apparaître sous un signe d'intégration.
>
> Les premiers sont évidemment une sorte de microscope par laquelle on représente des relations dans l'infiniment petit. Le second, au contraire, est essentiellement synthèse et non analyse. [Hadamard 1912 1997]

Ce passage permet d'éclairer rétrospectivement toute la stratégie argumentative mise en œuvre par Hadamard dans son analyse de l'œuvre mathématique de Poincaré. On pourrait penser que le rôle des conditions aux limites dans une enceinte fermée fournit une occasion de souligner encore une fois le rôle de la forme, même s'il ne s'agit pas ici uniquement d'*Analysis situs* ; on pourrait aussi voir dans l'interdépendance organique de toutes les parties une occasion de souligner la spécificité d'un niveau global et l'impuissance, face à certains problèmes, du point de vue universellement local. Dans les deux cas, la présentation des problèmes d'équations aux dérivées partielles prolongerait le thème principal, s'inscrirait comme simple variante … ce n'est pas le choix de Hadamard qui, au contraire, caractérise la spécificité des problèmes d'équations aux dérivées partielles en montrant combien, par nature, ils échappent au schéma décrit dans le thème principal. L'absence d'un terme fixe tel « global » à coupler à « local » n'est peut-être pas qu'un accident de vocabulaire : s'il existe bien un niveau local autonome, de même qu'un niveau infinitésimal autonome, Hadamard ne désigne pas de niveau global *autonome* dont certains problèmes pourraient relever sans lien avec les deux autres niveaux. Le global n'est saisi *que* sous l'angle dynamique du dépassement du local. La phase de synthèse dépasse la phase d'analyse en dévoilant les spécificités, en particulier d'*Analysis situs*, des différents domaines ; elle n'en est pas moins une *phase* logiquement et temporellement subordonnée à l'analyse locale. Entendons-nous bien : dans sa description des problèmes d'équations aux dérivées partielles, Hadamard nous parle bien du global, par exemple au sens du *im Großen* d'Osgood, et les remarques sur la reformulation des problèmes comme problèmes d'équations intégrales est un élément important d'épistémologie du global. Mais dans la grille épistémologique proposée par Hadamard pour organiser sa présentation de l'œuvre de Poincaré, et plus généralement des mathématiques, il n'existe pas de catégorie, ni de terme, de global ; au contraire, ce sont les différences entre *deux aspects relevant pour nous d'une unique catégorie de « global »* qui sont au cœur de l'argumentation de Hadamard : d'une part le global saisi par le passage du local au global (par des procédés de prolongement, de recollement) ; d'autre part un niveau autonome, le global d'une interdépendance des parties si radicale qu'elle échappe aux stratégies de passage du local au global. Pour ce dernier aspect, il n'existe sous la plume de Hadamard pas de terme spécifique, alors que le premier aspect est décrit indifféremment par « d'ensemble », « de synthèse » ou « général » et toujours en couple avec « local » ou « d'analyse ». Ce travail actif de construction de deux aspects différents du global est intimement lié à la réflexions sur les équations aux dérivées partielles, à l'opposition entre équations de types hyperbolique et parabolique d'une côté, elliptique de l'autre. Cette réflexion est l'un des fils rouges de la réflexion de Hadamard, on en retrouve les éléments inchangés, en 1936, dans une conférence sur les équations aux dérivées partielles [Hadamard 1936]. On comprend mieux dans ce cadre la discrétion du commentaire de Hadamard sur la relation $C\text{-}F\text{+}N = 2p\text{-}2$: relation globale, certes ; illustrant à merveille le rôle de la forme et de l'*Analysis situs*, en effet ; s'appuyant sur une première phase d'étude locale des singularités, certainement ; pourtant, la démonstration ne semble pas relever pour Hadamard du schéma caractéristique de dépassement du local.

On voit aussi le rôle sous-jacent mais fondamental joué dans la construction de la grille épistémologie de Hadamard du problème de l'inversion locale et globale tel qu'il était traité en 1906 : il fournit le modèle central d'un dépassement du local conçu comme procédant *de proche en proche*, *pas à pas*. Faute d'un lien direct avec l'œuvre de Poincaré ce problème n'est pas repris dans le texte de 1912, mais on a vu son importance, en particulier en 1909. Le choix de Hadamard de soustraire les problèmes d'équations aux dérivées partielles au schéma principal présenté dans l'introduction et repris à propos de l'étude qualitative des équations différentielles peut expliquer une autre petite bizarrerie apparente : le problème de l'uniformisation des fonctions analytiques n'était pas inclus par Hadamard dans le répertoire des ceux illustrant le dépassement du local, alors qu'on a vu qu'il était très explicitement présenté chez Osgood, et ce sera de nouveau le cas chez Weyl, comme un exemple typique de balancement entre données *im Kleinen* et conclusion *im Großen*. Le commentaire de Hadamard sur les deux démonstrations que Poincaré donne du théorème d'uniformisation porte en effet essentiellement, on l'a signalé plus haut, sur le lien avec la théorie du potentiel. On doit enfin signaler une dernière apparition de « local » dans le texte, qui, bien que mineure, nous permet de souligner un point jusqu'ici laissé de côté. Dans la partie consacrée à la théorie qualitative des équations ordinaires, Hadamard commente ainsi le rôle de la formule de Kronecker :

> C'est surtout dans la théorie actuelle, en effet, que cette formule se présente comme l'auxiliaire indiqué et même indispensable dont l'apparition, à l'heure même où l'œuvre de Poincaré allait naître, semble répondre à une sorte d'harmonie préétablie. Deux caractères : la manière dont il dépasse d'emblée le domaine local et, d'autre part, le peu d'hypothèses qu'il implique, font que nul n'a pu jusqu'ici, lui être substitué à ce point de vue. [Hadamard 1912 1966]

Il présente ensuite l'interprétation que Poincaré donne de cette formule :

> Celle-ci –, si, pour fixer les idées, nous la considérons dans l'espace ordinaire – fait, comme on le sait, intervenir un système de trois fonctions F, G, H et exprime le nombre des zéros communs à ces trois fonctions dans un volume déterminé V (ces zéros étant comptés avec des signes convenables) à l'aide des valeurs que les fonctions en question prennent sur la frontière S de ce volume. [Hadamard 1912 1966]

La situation mathématique superpose de nombreux niveaux : des points singuliers sont en jeu, le résultat est global mais, premièrement, n'est pas obtenu en procédant de proche en proche, deuxièmement fait jouer un lien bien particulier entre un volume et son bord. Cette intrication fait de la formule de Kronecker un outil difficile à classer par rapport au schéma de passage du local au général, et Hadamard est cohérent en ajoutant pour l'occasion une nouvelle catégorie mixte : après les problèmes « locaux en apparence » et les solutions « à cheval » sur les deux points de vue, voici les formules qui « dépassent d'emblée le domaine local ». On constate ici aussi l'absence de terme spécifique pour désigner un niveau global autonome par rapport au local : c'est pourtant bien cela être « d'emblée » au delà du local. Signalons aussi que la classe de théorèmes faisant jouer le lien entre domaine et bord, classe fondamentale pour faire sentir le rôle de l'*Analysis situs* dans les mathématiques, classe avec laquelle Hadamard est très familier pour lui avoir consacré en 1910 le texte *Sur quelques applications de l'indice de Kronecker*, n'est nulle part identifiée spécifiquement par l'auteur. La formule de Kronecker n'est pas rapprochée de la notion de résidu, pourtant commentée à propos du travail de Poincaré sur les résidus des intégrales doubles. Quant aux formules de type Stokes il n'en est fait nulle mention ; il est vrai qu'à l'époque elles sont encore démontrées comme le faisaient Green ou Riemann et non par passage du local au global, nous aurons l'occasion d'y revenir dans le dernier chapitre. Remarquons enfin que ce commentaire de Hadamard sur la formule de Kronecker est l'un des rares, peut-être avec celui sur le rôle des solutions périodiques aux équations différentielles, où le schéma épistémologique principal soit rapproché non pas d'un problème ou d'une solution mais d'un procédé, d'une méthode ou d'une formule. Dans son ensemble, le texte de Hadamard propose une épistémologie des problèmes qui n'est pas associée à une « boîte à outil ». Les différents problèmes sont caractérisés par le lien qu'ils entretiennent avec un schéma un peu strict de dépassement du local de proche en proche, pour conclure soit qu'ils en relèvent, soit qu'ils n'en relèvent pas, soit enfin qu'ils présentent une figure mixte ou aux apparences trompeuses ; mais le parcours de l'œuvre de Poincaré ne sert pas à engranger des méthodes qui pourraient être qualifiées de méthodes générales de dépassement du local ou de saisie directe du non-local. On ne dépasse guère le niveau de grande généralité consistant à évoquer le rôle de l'*Analysis situs*, dans le cas des équations différentielles, ou des formulations intégrales, dans le cas des équations aux dérivées partielles. On verra, par contraste, combien la démarche de la période structurale 1930-1950 consiste à construire ensemble les classes de problèmes et les classes d'outils ; Weyl en montre l'exemple dès 1913.

Chapitre 9. Weyl (1913) : la structure.

Plus de dix ans après l'article d'Osgood dans l'*Encyclopädie,* la présence du couple *im Kleinen / im Großen* dans le cours que professe Weyl comme *Privatdozent* à Göttingen en 1911-1912 sur la théorie riemannienne des fonctions algébriques d'une variable complexe, et publié en 1913 sous le titre *Die Idee der Riemannschen Fläche* [Weyl 1913], ne surprend guère et ne justifie pas à elle seule l'intérêt que nous portons à ce texte. Il s'agit de comprendre en quoi les mêmes termes *im Kleinen / im Grossen*, avec en gros le même sens que chez Osgood et à propos des mêmes théories, accompagne un exposé mathématique de contenu – presque de nature – radicalement différent. Si la théorie des fonctions algébriques d'une variable complexe est un modèle de théorie globale, ce n'est pas tant parce qu'elle contient des *énoncés* globaux, comme le souligne Osgood, ou qu'elle illustre le rôle de *l'Analysis situs* dans les *problèmes* de dépassement du local, *à la* Hadamard, c'est parce que Weyl forge un mode d'exposition de cette théorie qui en fait un modèle de traitement des théories globales. Ce texte sera salué au 20ème siècle comme pionnier pour la topologie générale et modèle pour un traitement axiomatique intrinsèque de la notion de variété et de l'analyse sur les variétés ; presque deux générations plus tard, son édition de 1955 est encore l'un des manuels où apprendre le travail sur les variétés, aux côtés des cours de de Rham sur les variétés différentiables [Rham 1955] et de Chevalley sur les groupes de Lie [Chevalley 1946]. Il nous faut donc exposer en détail comment, dans le texte même, s'articulent les niveaux *méta* et épistémologique d'une part, la mise en place d'une théorie axiomatique et structurale d'autre part. Il nous faut aussi tenter de cerner la spécificité de l'exposé, spécificité qui réside dans l'assemblage d'éléments dont aucun, isolément, n'est spécifique à Weyl ; comprendre aussi en quoi un ouvrage qui ne contient aucun résultat mathématique nouveau n'en est pas moins une création de première importance.

I. Les enjeux d'une préface.

1. Une démarche riemannienne « dépassée » ?

Nous voudrions dans un premier temps donner quelques éléments de contexte permettant de comprendre le projet singulier de Weyl et de rendre quelques couleurs aux proclamations de la préface de 1913, certes véhémentes voire lyriques, mais dont le contenu pourrait finalement sembler assez banal.

i. Une présentation standardisée.

Avant de présenter les critiques adressées aux surfaces de Riemann, présentons ce que l'on entend par là au tournant du 20ème siècle, en commençant par ce que les mathématiciens d'alors nomment « surface de Riemann » au sens strict, à savoir les surfaces de Riemann des fonctions algébriques. Sur le modèle de l'exposé de Neumann, la présentation connaît une certaine standardisation à mesure qu'elle s'intègre dans des traités en partie destinés à l'enseignement. C'est cette présentation standard qu'on trouvait dans le manuel d'Osgood, ou que Hadamard expose dans ses *Notions élémentaires de géométrie de situation* [Hadamard 1909a]¸ qu'on trouve aussi, par exemple dans le traité d'Analyse de Camille Jordan :

> Concevons, avec *Riemann*, un système de n feuillets plans $P_1, \ldots P_n$ étendus sur le plan P des *z* ; chacun de ces feuillets, tel que P_i, étant d'ailleurs coupé suivant celles des lignes $L_1, \ldots L_\nu$ dans le caractère desquelles figure l'indice i. Une quelconque de ces lignes, L, ayant pour caractère (*ik*), sera une coupure pour les deux feuillets P_i, P_k. Imaginons qu'on soude chacun des bords de la coupure pratiquée sur P_i avec le bord opposé de la coupure faite sur P_k. Si nous opérons de même pour chacune des lignes $L_1, \ldots L_\nu$, toutes ces soudures auront pour résultat de réunir nos n feuillets en une surface unique S. [Jordan 1991b 626]

Sans multiplier à l'infini les exemples, il est intéressant de voir cette présentation reprise par des partisans d'une autre voie que la voie riemannienne, par exemple dans le traité de Hensel et Landsberg [Hensel, Landsberg 1902] qui propose une présentation mixte mais donnant toutefois l'avantage au point de vue arithmétique. Les premières lignes de l'explication suffisent à nous replacer en terrain familier :

> Imaginons *n* plans numériques
>
> $$H_1, H_2, \ldots, H_n,$$
>
> l'un au-dessus de l'autre, séparés d'une distance infiniment petite, tels que les origines et les axes tombent l'un sur l'autre, chacun sous le suivant. Sur ces plans imaginons que soient délimités, exactement comme plus haut, les domaines
>
> $$\overline{H_1}, \overline{H_2}, \ldots, \overline{H_n} \ ,$$

> de sorte que les cercles arbitrairement petits f_1, f_2,…,f_h et les coupures s_1, s_2,…,s_h se recouvrent exactement les uns les autres. [Hensel , Landsberg 1902 91] [1]

La seule petite variante chez Hensel et Landsberg consiste à évoquer le caractère « infiniment petit » de la distance séparant les plans, sans doute dans un souci de clarification ! Nous avions déjà vu Riemann hésiter à évoquer cet aspect, changeant légèrement la présentation entre 1851 et 1857. Cette variante n'a d'ailleurs aucune influence sur le cours de l'exposé. On peut résumer les différentes étapes de la présentation standard comme suit : (1) d'abord est donnée la sphère d'une grandeur complexe libre z (2) ensuite est donnée une fonction algébrique de z, définie explicitement par une relation polynomiale $R(u,z) = 0$, de degré n en u (3) l'étude locale en chaque point de la sphère (i.e. pour chaque valeur finie ou infinie de z) amène à distinguer un nombre fini de singularités, les points de ramification de la fonction u (4) un système de coupures de la sphère des z relie les points de ramification à un point ordinaire de sorte que le domaine coupé est simplement connexe et ne contient aucun point de ramification (5) on considère n copies de cette sphère coupée, les feuillets, chacun portant une branche univoque de la fonction u (6) l'étude des points de ramification indique les règles de recollement des bords entre feuillets différents. Le fruit de ce *procédé* est alors *une* surface de Riemann *de* la fonction algébrique *u au-dessus* de la sphère des z. Par commodité, nous désignerons dans la suite du texte ce cheminement standard par l'expression « couper/coller ». Les plus soucieux de rigueur parmi les partisans de cette présentation doivent ensuite justifier certaines des étapes et, plus important, discuter l'intrinséquéité du résultat. Pour ce qui est de la construction, on a vu par exemple Osgood inventer une série de théorèmes de passage d'une séparation locale à une séparation globale des feuillets sur les domaines simplement connexes, permettant de justifier l'étape (5) ; démontrer aussi un théorème d'application conforme *im Großen* pour justifier une partie de l'étape (6). La plupart des auteurs ne vont pas jusque là mais s'ingénie tout de même avec plus ou moins de bonheur à expliquer comment les voisinages *n*-uples des points de ramification dans le plan complexe correspondent à des voisinages simples sur la surface de Riemann, ce qui semble à la fois légitimer et utiliser l'existence d'uniformisantes locales auxiliaires du type $z^{1/n}$. L'autre point qui tracasse nos auteurs est, bien qu'ils n'emploient pas ce terme, la question de l'intrinséquéité : il faut montrer que l'objet construit ne dépend pas fondamentalement du

[1] « *Wir denken uns also n in unendlich kleinem Abstande übereinander liegende Zahlebene,* $H_1,H_2,\ldots,H_n$, *so gegeben, daß ihre Anfangspunkte und ihre Achse übereinander fallen und daß jede folgende Ebene unter der vorhergehenden liegt. Auf diesen Ebenen denken wir uns die Bereiche* $\overline{H_1},\overline{H_2},\ldots,\overline{H_n}$ *genau wie vorher abgeggrenzt, so daß die beliebige kleinen Kreise* $f_1,f_2,\ldots,f_h$ *und die Schnitte* $s_1,s_2,\ldots,s_h$ *einander ebenfalls decken.* »

procédé de construction, en particulier du choix, manifestement largement arbitraire, du système de coupures. C'est en réponse à cette question qu'on voit, par exemple, Osgood introduire une distinction entre aspects accidentels et aspects essentiels d'une surface de Riemann, séparant, on l'a vu, les aspects essentiels entre aspects *im Kleinen* et *im Großen*. Cette stratégie de distinction de l'essentiel et de l'accidentel est aussi celle choisie dans l'article que Wirtinger consacre à la théorie des fonctions algébriques d'une variable complexe dans le volume II.2 de l'*Encyclopädie* [Wirtinger 1901] ; cet article suit celui d'Osgood dans le volume et fut rédigé en même temps : le couple *im Kleinen* / *im Großen* n'y est pas employé, l'auteur utilisant le terme plus usuel de *Gesamtverlauf*. La question de l'intrinséquéité réapparaît en général un peu plus tard lorsqu'on aborde le changement de variable indépendante et les transformations birationnelles. Pour les auteurs qui souhaitent aborder le problème, c'est en général la solution de Neumann qui est choisie, à savoir évoquer la notion d'homéomorphisme de surfaces. Si on peut critiquer cette solution sur le plan conceptuel, par exemple pour son manque à distinguer les aspects topologiques des aspects conformes, on en comprend toutefois la tactique : ce qui est vu comme l'apport spécifique de la démarche riemannienne c'est la définition topologique du genre et la compréhension des phénomènes de périodicité des intégrales abéliennes par les propriétés d'*Analysis situs* de la surface de Riemann ; travailler à homéomorphisme près c'est sauver l'essentiel.

Mais l'expression « surface de Riemann » ne recouvre pas seulement cet objet-procédé utilisé en théorie géométrique des fonctions *algébriques* d'une variable complexe et la variabilité des emplois ne contribue pas nécessairement à clarifier la notion. Sans viser un panorama complet, signalons deux cas extrêmes. On peut, c'est l'usage minimal, utiliser le terme de « surface de Riemann » en théorie des fonctions d'une variable complexe pour évoquer tout problème de non-monodromie : il est ainsi équivalent de dire que l'on ne revient pas à la valeur initiale le long d'une boucle et de dire que le chemin n'est pas fermé sur la surface de Riemann de la fonction. On trouve cet emploi minimal de la notion chez Picard dans la démonstration de son premier théorème, elle est reprise dans la présentation qu'en donne Osgood. Cette même idée se retrouve dans un contexte ou, au contraire, la « surface de Riemann » de la fonction joue un rôle essentiel, celui de l'uniformisation des fonctions analytiques. Les démonstrations données en 1907 par Poincaré et Koebe utilisent fondamentalement ces sortes de surfaces de Riemann à une infinité de feuillets, avec des constructions d'ailleurs différentes chez les deux auteurs ; Poincaré, on l'a vu, avait abandonné la présentation de 1883 par classes d'équivalence de chemins au profit d'une construction par recollement de disques ; Koebe s'inscrit plus dans la lignée des domaines fondamentaux de Klein et utilise des polygones dont il recolle les arêtes.

ii. Une démarche critiquée.

Notre travail sur l'évolution du traitement des problèmes globaux et l'apparition du couple local / global (ou *im Kleinen* / *im Großen*) nous a jusqu'ici conduit à suivre une certaine tradition géométrique en théorie des fonctions – quelconques ou algébriques – d'une variable complexe : Riemann, Neumann, Klein, Poincaré, Osgood. On ne comprendrait toutefois pas la position dans laquelle Weyl se trouve en 1913 en ne l'inscrivant que dans cette lignée, premièrement parce qu'il va emprunter des éléments aux théories concurrentes – on le verra plus loin –, ensuite et plus fondamentalement parce que sa préface *et* son innovation dans la construction de l'exposé sont des réponses aux critiques de cette démarche. Nous voudrions en particulier montrer combien, bien que le thème de la *rigueur* soit celui mis en avant explicitement par Weyl et repris par ses lecteurs, le problème d'intrinséquéité, plus discret, n'en joue pas un rôle moins fondamental dans la construction de l'argumentation weylienne.
Si la théorie riemannienne a toujours fait l'objet de critique, elle a aussi, depuis les années 1850, vu se développer des concurrents. Il ne s'agit pas ici de présenter ces perspectives concurrentes en théories des fonctions algébriques d'une variable complexe, mais de voir quelles reproches elles adressent à la démarche riemannienne, quels défis elles lancent, donc, à un auteur qui souhaite la défendre. En 1891, l'Union des Mathématiciens Allemands commande un exposé comparatif et critique des différentes perspectives en théorie des fonctions algébriques d'une variable complexe, rapport qui paraît en 1894 sous la plume de Brill et Noether [Brill, Noether 1894]. Pourtant spécialistes de ce domaine (un peu juges et partie donc), les auteurs doivent concéder que les méthodes « arithmétiques » de Kronecker d'une part, Dedekind et Weber d'autre part, resteront en dehors du champ de leur investigation : leur rapport n'en compte toutefois pas moins de 459 pages ! Nous ne présentons que leur commentaire sur l'apport de Riemann. Son travail est bien sûr loué pour la manière nouvelle qu'il a de poser la question :

> (…) le problème fondamental a pu se présenter ainsi à Riemann : sur une surface dont la forme est donnée en général par le support algébrique, définir les intégrales des

> fonctions algébriques par leurs seuls modules de périodicité. [Brill, Noether 1894 283][2]

et pour l'imposante moisson de résultats. Cette saisie par les surfaces permet, nous disent Brill et Noether, de dépasser les travaux de Cauchy et Puiseux ; elle dépasse Cauchy par son mode de détermination des conditions nécessaires à la détermination d'une fonction particulière, les conditions relatives aux contours et discontinuités donc ; elle dépasse l'étude de Puiseux, mais ce n'est pas le caractère purement local de cette dernière qui est mis en avant par Brill et Noether : Riemann l'emporte sur Puiseux

> (…) par le substrat intuitif pour la représentation des fonctions algébriques multivoques – la surface de Riemann – et la compréhension du nombre des périodes des intégrales de fonctions algébriques gagnée par les coupures de cette surface. [Brill, Noether 1894 285][3]

En 1894, cette démarche riemannienne semble toutefois bien dépassée : pour intégrer à l'édifice de la Science la merveilleuse moisson de ses résultats, les auteurs ont dû changer de voie. Bien entendu Brill et Noether rappellent le caractère incertain du « principe de Dirichlet » :

> Nous avons déjà cité la raison principale de l'abandon du raisonnement [*Gedankengang*] riemannien. Le fondement incertain fourni par le principe de Dirichlet, dont même les recherches pénétrantes de Schwarz et Neumann ne donnent toujours pas de substitut pleinement équivalent, a été remplacé par une « théorie des fonctions algébriques » et s'est ainsi rapproché du chemin naturel de développement de la Science. [Brill, Noether 1894 285][4]

Mais, on le voit, le défaut de fondement rigoureux du principe de Dirichlet n'est pas le seul point de critique ; la théorie riemannienne est critiquée pour son cheminement non « naturel », critique qui revient à deux reprises. Non seulement Riemann procède-t-il des intégrales abéliennes vers les fonctions algébriques – le chemin « naturel » procédant en sens inverse –, mais il part des intégrales de troisième espèce pour obtenir les autres. Des doutes se sont aussi

---

[2] « *(…) so mag sich Riemann das Grundproblem dargeboten haben : in einer Fläche, deren Gestalt die algebraische Unterlage im Allgemein abgiebt, die zu den algebraischen Functionen gehörigen Integrale durch ihre Periodicitätsmoduln allein zu definiren.* »

[3] « *(…) das anschauliche Substrat für die Vorstellung der mehrdeutigen algebraischen Function : die Riemann'sche Fläche und die durch ihre Zerschneidung gewonnen Einsicht in die Zahl der Perioden der Integrale algebraischer Functionen.* »

[4] « *Den Hauptgrund für dieses Aufgaben des Riemann'schen Gedankenganges haben wir früher angeführt. Die unsichere Grundlage, die das Dirichlet'sche Princip bietet, und für das selbst die eindrigenden Nachforschungen von Schwarz und Neumann nach einem passenden Ersatz heute noch kein völliges Aequivalent bieten, hat man durch die Ausbildung einer « Theorie der algebraischen Functionen » ersetzt und sich damit dem natürlichen Entwicklungsgange der Wissenschaft wieder genähert.* »

élevés quant à l'usage des surfaces de Riemann elles-mêmes : le cheminement suppose la surface donnée (*fertig*) ; pourtant les successeurs de Riemann, Neumann et Klein en particulier, doivent discuter les différentes formes de la surface correspondant à une équation $F(s,z) = 0$; cette étape de discussion semble inutilement compliquée, nous disent Brill et Noether, et les théories soit algébriques soit arithmétiques ont depuis montré qu'on peut s'en dispenser entièrement, de même que de toute interprétation géométrique de l'équation. La conclusion de nos auteurs est sans appel : les théories « actuelles » ont eu pour principal objectif de fonder les résultats de Riemann sur des bases plus sûres – question de rigueur – et non transcendantes – question de pureté des méthodes.

Les deux thèmes s'entremêlent dans de nombreux autres textes. Si on connaît l'article de Weierstrass montrant l'invalidité d'un « principe de Dirichlet » général, on peut trouver d'autres textes où c'est la question du fondement naturel qui est abordée. On dépasse ici le cadre de la théorie des fonctions algébriques pour aborder la théorie générale des fonctions : ainsi dans une lettre à Schwarz en 1875, Weierstrass écrit :

> (…) plus je réfléchis aux principes de la théorie des fonctions, ce que je fais continuellement, plus je suis fermement convaincu qu'elle doit être bâtie sur le fondement de vérités algébriques ; que ce n'est donc pas la bonne voie que de recourir au « transcendant » - pour m'exprimer rapidement – pour justifier des propositions algébriques simples et fondamentales, si éblouissantes que puisse être à première vue, par exemple, les considérations par lesquelles Riemann a découvert tant des propriétés les plus importantes des fonctions algébriques. (Que toutes les voies soient permises au chercheur, tant qu'il cherche, voilà qui se comprend de soi ; il ne s'agit ici que du fondement systématique). [Weierstrass 1894-1927 235][5]

On notera au passage que ce que Weierstrass entend par « algébrique » est assez loin de ce que ce terme recouvrait sous la plume de Brill et Noether ; ces derniers pensaient à la théorie des courbes algébriques et des invariants, alors que Weierstrass fait référence à sa notion de configuration analytique associée à une fonction algébrique donnée par une équation algébrique $F(s,z) = 0$. En un sens, aucune reprise de la théorie riemannienne, si brillante et rigoureuse qu'elle soit, ne saurait convaincre ceux qui pensent que la théorie des fonctions

[5] « (…) *Je mehr ich über die Principien der Functionentheorie nachdenke – und ich thue dies unablässig -, um so fester wird meine Überzeugung, dass diese auf dem Fundamente algebraischer Wahrheiten aufgebaut werden muss, und das es deshalb nicht der richtige Weg ist, wenn umgekehrt zu Begründung einfacher und fundamentaler algebraischer Sätze das « Transcendentes », um mich kurz auszudrücken, in Anspruch genommen wird – so bestechend auch auf den ersten Anblick z.B. die Betrachtungen sein mögen, durch welche Riemann so viele der wichtigsten Eigenschaften algebraischer Functionen endeckt hat. (Dass dem Forscher, so lange er*

algébriques d'une variable complexe est par nature la théorie d'une situation algébrique – une équation polynomiale à deux variables – et que pour des raisons de pureté des méthodes seule une étude algébrique est acceptable. Le défi que peut relever Weyl est, par contre, de démentir l'idée selon laquelle la voie riemannienne est impropre à un fondement systématique ; cette opposition entre « chercher » et « fonder » se retrouve quelques années plus tard sous la plume de Poincaré :

> En un mot, la méthode de Riemann est avant tout une méthode de découverte, celle de Weierstrass est avant tout une méthode de démonstration. [Poincaré 1899c 7]

Quelques années après le *Bericht* de Brill et Noether, un panorama beaucoup plus bref mais couvrant toutes les voies de recherche est proposé à la fin du l'ouvrage de Hensel et Landsberg sur la théorie des fonctions algébriques d'une variable, par des partisans d'une théorie concurrente *à la fois* de celle de Riemann et de celle de Brill et Noether. Les critiques de la théorie riemannienne sont, dans l'ensemble, directement reprises du *Bericht* de 1894 : fondement douteux sur le principe de Dirichlet, cheminement non naturel du transcendant vers l'algébrique. Comme en 1894, la démarche riemannienne est décrite comme appartenant à une phase antérieure du développement de la théorie, les voies actuelles (en 1902) étant la voie *funktiontheoretisch* de Weierstass, la voie géométrique de Brill, Noether, Clebsch et Gordan, et la voie arithmétique de Kronecker, Dedekind-Weber et Hensel lui-même. Les méthodes géométrico-algébriques de Brill et Noether sont critiquées pour leur manque de généralité dans le traitement des singularités des courbes algébriques, critique qui leur était déjà faite par Dedekind et Weber.

iii. Une démarche concurrencée.

La théorie riemannienne, qu'elle soit la théorie originale de Riemann ou la version standardisée exposée dans les manuels de la fin du siècle, n'est pas la seule à être confrontée à un problème d'intrinséquéité. Toute théorie prenant comme point de départ une équation algébrique F(s,z) = 0 se trouve confrontée, à un moment différent selon la voie choisie, à la question du changement possible de variable indépendante ; il est vrai que l'approche standardisée en couper/coller s'y heurte beaucoup plus tôt et de manière inédite ! Il est intéressant de voir comment les partisans de la voie arithmétique répondent à ce problème d'intrinséquéité – ainsi qu'à toutes les autres critiques : manque de rigueur, nécessité d'un

sucht, jeder Weg gestattet sein muss, versteht sich von selbst ; es handelt sich nur um die systematische Begründung.) »

traitement purement algébrique d'une question de nature algébrique, traitement général ne nécessitant pas de longue discussion de cas ni d'hypothèses simplificatrices – par une stratégie consistant à renverser les priorités entre objets ; on verra que cette stratégie sera reprise par Weyl. Nous nous appuyons sur l'exposé de cette théorie que Weber donne en 1908 dans le troisième volume de son cours d'algèbre [Weber 1908], presque trente ans, donc, après l'article original de Dedekind et Weber (1882). Les fonctions algébriques d'une variable (non nécessairement complexe d'ailleurs) y sont certes définies par les relations polynomiales $F(\theta,z) = 0$, mais le terme de « fonction » ne renvoie pas ici à l'idée de deux grandeurs variables complexes liées, il ne s'agit pas d'étudier les variations de θ connaissant celles de z sur sa sphère ; les fonctions sont simplement les éléments d'un domaine d'objets déterminés par un mode d'écriture possible et les règles de calcul des quatre opérations de l'arithmétique, le corps quotient que nous noterions $\mathbf{C}[\theta,z]/F(\theta,z)$, qu'on peut voir aussi (mais de manière moins intrinsèque) comme extension algébrique du corps $\mathbf{C}(z)$. C'est de manière purement algébrique que ce corps Ω est dans un premier temps étudié, en analogie avec les corps de nombres algébriques : on y distingue les éléments entiers, les questions de divisibilité et de primalité entrent alors en jeu. C'est seulement dans un deuxième temps que sont introduits les points d'un espace pour lequel les éléments du corps jouent le rôle de « fonction *sur* ». La définition est d'une abstraction radicale : un « point » est une association entre éléments du corps et « nombres » (comprenant les nombres complexes et un symbole ∞) compatible avec les quatre opérations du corps et réalisant l'identité sur les constantes numériques du corps [Weber 1908 663] ; un « point » est donc ce qui permet d'associer un « nombre » à une « fonction » de manière compatible avec la structure de $\mathbf{C}$-algèbre de Ω. Après avoir donné cette définition, le premier souci de Weber est, avant même de montrer qu'il existe des points, d'en souligner le caractère intrinsèque :

> Le point est donc une notion invariante relative au corps Ω, indépendante de la circonstance accidentelle qui fait considérer telle ou telle fonction comme la variable indépendante. [Weber 1908 664][6]

Après avoir montré comment associer un point aux fonctions premières, Weber conclut son paragraphe en faisant le lien avec la notion de surface de Riemann :

> La totalité des points forment la surface de Riemann absolue [1]. [Weber 1908 666][7]

La note précise :

---

[6] « *Der Punkt ist hiernach ein zu dem Körper Ω gehöriger invarianter Begriff, der nichts mit dem zufälligen Umstand zu tun hat, welche der Funktionen von Ω wir als die unabhängige Variable betrachten*. »
[7] « *Die Gesamtheit der Punkte bilden die absolute Riemannsche Fläche* [1] »

[1]) En théorie riemannienne des fonctions algébriques il correspond à chaque point de la surface fermée à plusieurs feuillets un point au sens que nous donnons à ce terme. Si *z* est la variable indépendante, la surface de Riemann à *n* feuillets est alors étendue au dessus du plan des *z*. On peut considérer comme surface de Riemann absolue n'importe quelle surface pouvant être corrélée de manière univoque et continue avec la totalité de cette surface. [Weber 1908 666] [8]

Le caractère intrinsèque de la notion de point – donc de la totalité des points – au sens de la théorie de Dedekind et Weber est donc explicitement lié à la recherche d'une définition intrinsèque de la surface de Riemann dans les voies géométriques, avec d'ailleurs le même flou quand aux caractères bijectifs et conformes des corrélations. La totalité des points, la surface de Riemann absolue, n'est bien sûr pas munie chez Weber d'une structure topologique ou conforme : il ne le souhaite pas (question de pureté de méthode, perspective de travail sur d'autres corps que **C**), il n'en a pas besoin (question de simplicité) … et il n'est pas certain qu'il sache le faire, du moins avec l'élégance qui sera celle de Weyl. Les points au sens de Weber permettent de définir de nouveaux objets intrinsèques, les polygones (nous dirions, avec Hensel puis Weyl, les diviseurs), généralisant les fonctions du corps Ω et permettant d'introduire, hors de toute notion de limite, la notion de différentielle. Si l'on compare cette approche arithmétique avec celle de Weyl on pourrait dire, avec Hadamard, que la première se situe d'*emblée* dans le global ; Weyl, au contraire, va reconstruire ces notions, en héritant en particulier de la distinction *de nature* entre fonction et différentielle, en partant du local. Si l'on revient à Weber, l'introduction des polygones lui permet de redémontrer les théorèmes usuels sur les différentielles algébriques : théorème de Riemann-Roch, existence de différentielles des trois espèces et lien entre le nombre de différentielles de première espèce linéairement indépendantes et le genre du corps (défini à la section précédente), nullité de la somme des résidus de toute différentielle. Par contre, faute d'un équivalent de l'intégration, il exclut les intégrales abéliennes du champ de l'étude ; à propos des différentielles qui ne sont pas des différentielles de fonctions, il souligne en effet que, quoique notée dJ :

[8] « [1]) *Nach Riemanns Theorie des algebraischen Funktionen entspricht jeder Punkt der geschlossenen mehrblättrigen Fläche einem Punkt in unserem Sinne. Ist z unabhängige Variable, so ist die Riemannsche Fläche n-blätterig über die z-Ebene ausgebreitet. Als absolute Riemannsche Fläche kann man irgend eine Fläche betrachten, auf die die Gesamtheit jener mehrblätterigen Flächen eindeutig und stetig bezoge werden kann*. »

> Pour ces dernières J n'a en lui-même aucune signification ; il n'en obtient qu'en calcul intégral, qui n'est pas accessible à la méthode purement arithmétique. [Weber 1908 689][9]

Grâce aux travaux de Dedekind et Weber, Weyl dispose donc d'un modèle de théorie réussissant à relever les défis de rigueur et d'intrinséquéité en modifiant, dans une démarche très abstraite, les sens des termes « fonction » et « point », et en faisant dériver la surface de Riemann absolue du corps des fonctions. Il relève le défi d'un traitement aussi rigoureux et intrinsèque – et aussi abstrait dans la liberté qu'il se donne pour redéfinir les termes de base de la théorie – mais en repartant d'une notion intrinsèque de surface de Riemann pour en dériver ensuite le corps des fonctions et le système des différentielles.

2. Légalité primitive du lieu.

C'est bien sûr tout l'exposé de Weyl qui doit être analysé en regard des défis qu'il souhaite relever. Les éléments donnés dans la préface ne peuvent qu'indiquer des choix ou proclamer des convictions ; Weyl ne s'en prive pas. Il importe toutefois de présenter les principaux thèmes que Weyl y introduit, quitte à défendre l'idée que des thèmes fondamentaux comme ceux du passage du local au global ou du souci de l'intrinsèque n'y apparaissent qu'en filigrane, alors qu'ils jouent un rôle décisif dans la construction de l'ouvrage. Le premier thème mis en avant est celui de la rigueur, dans trois cas particuliers. La préface s'ouvre sur ce thème, à propos de la topologie :

> Cet ouvrage reprend l'essentiel du contenu de l'un des cours que j'ai donné à l'Université de Göttingen au semestre d'hiver 1911/12. Le dessein essentiel en était de présenter les idées fondamentales de la théorie des fonctions de Riemann sous une forme satisfaisant à toutes les exigences modernes de *rigueur*. Il manquait jusqu'à présent une telle présentation rigoureuse, fondant les concepts et les propositions d'*Analysis situs* auxquelles la théorie des fonctions fait appel non pas sur une plausibilité intuitive mais sur des preuves exactes de la théorie des ensembles. [Weyl 1913 v][10]

---

9 « *Für die letzeren hat J selbst keine Bedeutung und erhält eine solche erst in der Integralrechnung, die der rein arithmetischen Methode nicht zugänglich ist.* »

10 « *Die vorliegende Schrift gibt den Hauptinhalt einer von mir im Wintersemester 1911/1912 an der Universität Göttingen gehaltenen Vorlesungen wieder, deren wesentlich Absicht war : die Grundideen der Riemannschen Funktionentheorie in einer Form entwickeln, die alle modernen Anforderungen an* Strenge *völlig genügen leistet. Ein solche strenge Darstellung, die namentlich auch bei Begründung der Fundamentalen, in die*

Voilà qui n'aurait pas surpris sous la plume d'Osgood, à ceci près que Weyl renvoie aux travaux de Brouwer des années 1911/1912 et non au *Bericht* de Schönflies. Le thème est repris quelques lignes plus loin à propos, moins d'une théorie particulière comme l'*Analysis situs*, que de la saisie géométrique, en un sens général :

> Il était usuel, et pour autant que je vois il est toujours usuel, dans les présentations de la théorie riemannienne des fonctions, d'utiliser l'idée de *courbe* telle qu'elle est donnée en notre intuition sensible, sans fixation conceptuelle ; et de faire un usage naïf des propriétés qui s'imposent à nous avec une sorte d'évidence intuitive (par exemple, qu'une courbe a deux côtés). Toutefois, on ne peut plus aujourd'hui douter que cette « évidence intuitive » ne nous dégage nullement de l'obligation de fournir des *preuves* de ces vérités, preuves s'appuyant en dernier recours sur les axiomes de l'arithmétique ; [Weyl 1913 v][11]

Ce jugement aurait été un peu sévère s'il s'était adressé à Neumann, mais on comprend en plusieurs points de la préface que c'est de la présentation standard par couper/coller que parle Weyl. Ici encore l'appel au fondement rigoureux, c'est-à-dire ensembliste au sens que ce terme prend de Weierstrass à Schönflies (ou « arithmétique » et « ensembliste » sont quasiment synonymes, sans lien avec le sens d' « arithmétique » sous la plume de Weber), n'a rien d'original ; c'est ce que Weyl en fera dans le texte qui le sera, ce que laisse simplement entrevoir la suite de cet extrait de la préface :

> Un fondement rigoureusement ensembliste aux concepts et théorèmes topologique en question dans la théorie riemannienne des fonctions est d'autant plus nécessaire que les « points » formant les figures fondamentales (courbes et surfaces) ne sont pas des points de l'espace au sens usuel, mais peuvent être des êtres mathématiques d'un type quelconque (par exemple des éléments de fonction). [Weyl 1913 vi] [12]

Le même thème de rigueur est repris un peu plus loin, non plus à propos de la topologie mais à propos des théorèmes d'existence de fonctions harmoniques fondées sur le « principe de

---

Funktionentheorie hineinspielenden Begriffe und Sätze der Analysis situs *sich nicht auf anschauliche Plausibilität beruft, sondern mengentheoretisch exakte Beweise gibt, liegt bis jetzt nicht vor.*

[11] « *Es war früher üblich und ist, sowie ich sehe, bis jetzt in allen Darstellungen der Theorie der Riemannschen Flächen üblich geblieben, die Vorstellung der* Kurve*, wie sich in unserer sinnlichen Anschauung gegeben vorzuliegen scheint, ohne begriffliche Fixierung herüberzunehmen und von denjenigen Eigenschaften, welche sich uns an dieser Vorstellung mit einer Art anschaulicher Evidenz (z.B. von dem Satz, daβ eine Kurve zwei Ufer hat) einen naiven Gebrauch zu machen. Die « anschauliche Evidenz » enthebt uns aber, daran kann heute kein Zweifel mehr sein, keineswegs der Notwendigkeit, für eben diese Wahrheiten* Beweise *zu erbringen, die letzten Endes auf die Axiome der Arithmetik gestützt sind.* »

[12] « *Eine strenge mengentheoretische Fundierung der für die Riemannsche Funktionentheorie in Frage kommenden topologischen Begriffe und Theoreme ist um so mehr erforderlich, als die « Punkte », aus denen hier die Grundgebilde (die Kurven und Flächen) bestehen, keine Raumpunkte im gewöhnlichen Sinne sind, sondern beliebige mathematische Dinge anderer Art (z.B. Funktionselemente) sein können.* »

Dirichlet » ; on a vu que c'était le point de critique principal, du moins le point technique sur lequel portait la critique. Weyl s'appuie ici sur la démonstration de Hilbert d'une version du principe de Dirichlet, permettant de revenir au schéma riemannien original en laissant de côté les méthodes de Schwarz et Neumann. Le thème de la rigueur est enfin utilisé à propos de l'uniformisation des fonctions algébriques, pour lesquelles les démonstrations de Koebe, nous dit Weyl, sont inattaquables. On voit donc Weyl utiliser des travaux récents, de Brouwer, Hilbert ou Koebe, pour défendre point par point les aspects susceptibles d'être critiqués techniquement pour leur manque de rigueur. Cette défense point par point est aussi le premier pas d'une défense globale contre l'idée selon laquelle la méthode riemannienne est impropre à *fonder* la théorie.

Il faut aussi répondre à un autre angle de critique portant moins sur le degré de précision dans la fixation d'un concept ou de rigueur de la démonstration d'un résultat, que sur des défauts de la démarche générale. Ces défauts sont de deux ordres : on critique une voie standard qui, outre les problèmes d'intrinséquéité commun à toutes les théories partant d'une équation algébrique et choisissant l'une des variable comme indépendante, en crée d'autres spécifiques par son mode de donation *procédural* de l'objet qu'est la surface de Riemann et – même s'il s'agit plus d'une insatisfaction que d'une critique formulée avec précision – le relatif flou quant à la relation d'équivalence permettant de passer à la surface « absolue », pour reprendre le terme de Weber ; on critique, au niveau supérieur, l'idée même d'un traitement transcendant d'une question de *nature* algébrique, nature visible dans la définition même de l'objet qui fournit le point de départ de la théorie, l'équation polynomiale à deux variables. Weyl commence par signaler qu'il ne suivra pas la présentation devenue standard depuis Neumann [Weyl 1913 v] et l'on est en effet frappé par la manière dont l'exposé de Weyl ne reprend finalement aucune des étapes de ce cheminement. Les questions d'intrinséquéité créées spécifiquement par cette présentation standard sont levées, non pas comme chez Osgood en cherchant à justifier plus rigoureusement telle ou telle étape, mais en choisissant un cheminement radicalement différent qui évite leur apparition, un cheminement intrinsèque de bout en bout. Ce cheminement nouveau ne part pas non plus du point de départ commun aux théories algébriques (*à la* Brill et Noether), fonctionnelles (*à la* Weierstrass) et en un certain sens aussi à la théorie arithmétique (*à la* Weber), mais de la surface elle-même. Un peu à la manière de Weber, qui résout le problème de l'intrinséquéité (et du global) en prenant comme objet de départ le corps des fonctions, Weyl innove en changeant d'objet de départ, ce qui lui permet, en repoussant très loin dans l'exposé l'apparition de la première équation algébrique, de repousser l'idée d'une nature fondamentalement algébrique des questions. On voit les éléments de cette stratégie argumentative complexe s'entremêler dans le fameux passage :

> On rencontre encore ici ou là la conception selon laquelle la surface de Riemann n'est rien d'autre qu'une « image », un moyen (qu'on reconnaît *très* utile et *très* suggestif) pour rendre plus présente et intuitive la multiformité des fonction. Cette conception est totalement fausse. La surface de Riemann est une composante *objective* indispensable de la théorie, elle en est en fait le fondement. Elle n'est pas non plus ce qu'on distille *a posteriori* avec plus ou moins d'habileté des fonctions analytiques, on doit au contraire la considérer avant toutes choses et comme la terre natale sur laquelle les fonctions peuvent croître et prospérer. On doit cependant concéder que Riemann lui-même, par la forme de sa présentation, a un peu caché ce lien véritable entre les fonctions et la surface de Riemann – peut-être pour ne pas imposer à ses contemporains des conceptions qui leur étaient entièrement étrangères ; ainsi ne parle-t-il que de surfaces à plusieurs feuillets, revêtant le plan et à points d'enroulement isolés – ce à quoi on pense encore aujourd'hui tout d'abord lorsqu'il est question de surface de Riemann ; plutôt que d'utiliser la conception plus générale (développé pour la première fois en toute clarté par Klein) dont on peut indiquer la caractéristique ainsi : par elle, le lien avec le plan d'une variable complexe indépendante, de même que le lien avec les points de l'espace tridimensionnel, est fondamentalement défait. Aucun doute n'est possible : les conceptions de Klein ont pour la première fois rendu les idées fondamentales de Riemann à leur simplicité naturelle, à leur puissance vive et percutante. C'est sur cette conviction que se fonde cet ouvrage. [Weyl 1913 vi][13]

[13] « *Man begegnet noch hie und da der Auffassung, als ob die* Riemannsche Fläche *nichts weiter sei als ein* « Bild »*, als ein (man gibt zu :* sehr *wertvolles*, *sehr* suggestives) *Mittel zu Vergegenwärtigung und Veranschaulichung der Vieldeutigkeit von Funktionen. Die Auffassung ist von Grund aus verkehrt. Die Riemannsche Fläche ist ein unentbehrlicher* sachlicher *Bestandteil der Theorie, sie ist geradezu deren Fundament. Sie ist auch nicht etwas, was a posteriori mehr oder minder künstlich aus der analytischen Funktionen herausdistilliert wird, sondern muß durchaus als das prius betrachtet werden, als der Mutterboden, auf dem die Funktionen allererst wachsen und gedeihen können. Es ist freilich zuzugeben, daß Riemann selbst die wahre Verhältnis der Funktion zur Riemannschen Fläche durch die Form seiner Darstellung etwas verschleiert hat – vielleicht nur, weil er seinen Zeitgenossen allzu fremdartig Vorstellungen nicht zumuten wollte ; dies Verhältnis auch dadurch verschleiert über, daß er nur von jenen mehrblättrigen, mit einzelne Windungspunkten über die ebene sich ausbreiteten Überlagerungsflächen spricht, an welche man noch heute in erster Linie denkt, wenn von Riemannschen Flächen die rede ist, und sich nicht der (erst später von Klein zu durchsichtiger Klarheit entwickelten) allgemeineren Vorstellung bediente, als deren Charakteristikum man dieses nennen kann :daß in ihr die Beziehung zu der Ebene einer unabhängigen komplexen Veränderlichen, sowie überhaupt die Beziehung zum dreidimensionalen Punktraum grundsätzlich gelöst ist. Und doch ist darüber kein Zweifel möglich, daß erst in der Kleinschen Auffassung die Grundgedanken Riemanns in ihrer natürlichen Einfachheit, ihrer lebendigen und durchschlagenden Kraft voll zur Geltung kommen. Auf dieser Überzeugung basiert die vorliegende Schrift.* »

C'est le déploiement de cette révolution copernicienne consistant à étudier, non plus les surfaces associées aux fonctions (puis les fonctions associées aux surfaces associées aux fonctions), mais les fonctions associées à une surface – une révolution copernicienne amenant à jouer le Riemann de Klein contre le Riemann de Riemann (!) – qu'il faut maintenant présenter ; une révolution dont le nouvel objet fondamental devra être donné sans lien extrinsèque avec un plan (ou une sphère) de base, ni plongé dans un espace numérique usuel. Nous espérons aborder cette présentation du texte de l'exposé weylien en ayant montré qu'il répond à des défis plus précis, moins incolores, que ceux de la « rigueur » ; qu'un espace problématique au sein duquel les enjeux d'intrinséquéité sont fondamentaux doit s'y déployer, par delà les « convictions » et la revendication un peu transparente des

> (…) méthodes *les plus simples et les plus conformes à la nature des choses* conduisant au but fixé. [Weyl 1913 v][14]

II. Caractériser et se donner une surface de Riemann.

Le travail de Weyl dans les six premiers paragraphes consiste en un aller-retour assez subtil : c'est tout d'abord l'une des voies concurrentes de la voie standard qui est présentée, la voie *funktiontheoretisch* de Weierstrass ; mais la présentation en isole certains traits, de sorte qu'elle peut ensuite servir de modèle à la formulation axiomatique des objets à étudier, surfaces topologiques et surfaces munies d'une structure analytique complexe – nous utiliserons, avec Weyl, le terme de surface plutôt que celui, également légitime, de courbe analytique complexe, le contexte ne permettant pas de confusion. Nous désignerons ces objets par le terme d'«objets-lieux » pour les distinguer des fonctions et différentielles *sur* un tel objet-lieu, que nous appellerons collectivement des « objets-sur ».

1. L'accès par le local.

i. Lecture de Weierstrass.

Dans un premier temps Weyl présente de manière parfaitement classique les notions d'« élément de fonction » – série entière de rayon de convergence non nulle –, de prolongement analytique le long d'une courbe pouvant faire apparaître de la multivocité ; pas

[14] « *(...) nach den* einfachsten und sachgemäßesten *Methoden gesucht habe, die zu dem vorgegebenen Ziel führen ;* »

toutefois si les courbes ont mêmes extrémités et sont suffisamment proches. Les éléments mis en place permettent de définir la notion de fonction analytique, au sens de Weierstrass :

> Une *fonction analytique* est la totalité [*Gesamtheit*] G de tous les éléments de fonction pouvant être formés par prolongement analytique à partir d'un élément donné. [Weyl 1913 4][15]

Notons que ici « fonction analytique » est un bloc : il n'y a pas définition d'abord d'un concept général de fonction – pour lequel, on le verra, Weyl comme Osgood demande une déclaration préalable de domaine, et en général l'univocité – qu'on particulariserait ensuite par une condition d'analyticité ; Weyl choisit d'ailleurs la lettre G et non *f* pour désigner cette collection d'éléments de fonction. Sa stratégie va consister à interpréter la « fonction analytique » à la Weierstrass comme un objet-lieu et non un objet-sur. Il termine toutefois le paragraphe en montrant qu'on peut, à chaque point d'une fonction analytique, associer une valeur (*Wert*). Au paragraphe 2, Weyl poursuit la présentation et la réinterprétation des notions weierstrassiennes en passant de la « fonction analytique » à la « configuration analytique » (*analytisches Gebilde*). Une petite comparaison avec l'exposé de Weierstrass, publié en 1902 mais reprenant les cours des années 1875-1876 [Weierstrass 1902], permet de saisir la réécriture weylienne. Weierstrass commence par définir la configuration analytique associée à une équation polynomiale $f(x,y) = 0$, supposée irréductible, comme l'ensemble des couples de solutions (xy), en autorisant les valeurs complexes ou infinies. Chaque couple est appelé un « point » (*Stelle* ou *Punkt*) de la configuration. Selon Weierstrass :

> On arrive ensuite au problème suivant : (ab) étant un point donné quelconque – dans le fini – d'une configuration donnée, déterminer tous les points (xy) de ce dernier pour lesquels la valeur absolue des deux différences x-a et y-b ne dépassent pas une certaine limite, qui peut être prise arbitrairement petite. On peut aussi l'exprimer plus brièvement en disant qu'il s'agit de représenter les points de la configuration qui se trouvent infiniment près [*unendlich nahe liegen*] ou qui forment le voisinage de ce point. [Weierstrass 1902 13][16]

Les points, en nombre fini, où les dérivées partielles de *f* s'annulent toutes deux nécessitent un traitement spécial et se nomment les points singuliers de la configuration. Dès le traitement du

---

[15] « *Eine* analytische Funktion *ist die Gesamtheit G aller derjenigen Funktionselemente, die aus einem gegebenen Funktionselement durch analytische Fortsetzung entstehen können.* »

[16] « *Zunächst handelt es sich nun um folgende Aufgabe. Es sollen, wenn (ab) irgend eine bestimmte im Endlichen gelegene Stelle eines gegebenen Gebildes ist, alle diejenigen Stellen (xy) des letzteren bestimmt werden, für welche die absolut Beträge der beiden Differenzen x-a und y-b eine gewisse Grenze, die beliebig klein angenommen werden kann, nicht überschreiten. Man kann dies auch kürzer so ausdrücken, es sind alle Stellen*

cas non singulier, Weierstrass utilise un artifice important : au moins l'une des deux dérivées partielles n'étant pas nulle, on peut procéder à un changement de variable linéaire inversible entre (*x,y*) et de nouvelles variables indépendantes (*s,t*). Une version analytique du théorème des fonctions implicites permet de conclure à la représentation locale de la configuration (dans l'espace des deux variables *x,y*) au moyen de l'unique variable auxiliaire *t* :

> Nous pouvons aussi formuler ainsi ce résultat : pour des valeurs de |t| suffisamment petites, le couple de fonctions
>
> $$x = \varphi(t)\ ,\ \ y = \psi(t)$$
>
> fournit tous les points (xy) de la configuration algébrique dans le voisinage du point (ab). [Weierstrass 1902 16][17]

C'est la totalité des points de la forme (φ(t),ψ(t)) que Weierstrass nomme « élément » de la configuration, élément de centre (ab) = (φ(0),ψ(0)). Ce sont toujours les points qui servent à définir l'équivalence des éléments :

> Deux éléments de la configuration peuvent être dit équivalents s'ils ont même centre et si dans l'un de ses voisinages déterminé tout point de l'un est aussi un point de l'autre. [Weierstrass 1902 16] [18]

La traduction analytique de cette équivalence consiste en la possibilité d'un changement de paramètre de la forme $t = c_1\tau + c_2\tau^2 + \ldots$, de rayon de convergence non nulle, où $c_1 \neq 0$. Le cas des points singuliers est ensuite abordé, Weierstrass montrant qu'il faut alors en général plus d'un mais toujours un nombre fini d'éléments (φ(t),ψ(t)) pour représenter la configuration au voisinage du point [Weierstrass 1902 19] ; ces éléments demeurent toutefois des séries à exposants entiers : l'utilisation d'un paramètre auxiliaire *t* plutôt que de *z* comme variable libre évite le recours aux exposants fractionnaires et la discussion des voisinages *n*-uples des points de ramification dans le plan des *z*.

Weyl reprend cette présentation : il explique, de manière informelle, qu'on passe de la notion de fonction analytique à celle de configuration analytique en ajoutant les pôles et les points de ramification, techniquement en considérant comme éléments non plus des séries entières mais des couples (z,u) = (P(t),Q(t)) de séries de puissances – un nombre fini d'exposants négatifs étant autorisés – de rayon de convergence (ou de disque épointé de convergence) non nul

---

des Gebildes darzustellen, welche der gegebenen Stelle (ab) unendlich nahe liegen oder die Umgebung dieser Stelle bilden. »

[17] « *Wir können dieses Resultat auch so ausdrücken : Für hinreichend kleine Werthe von |t| liefert das Functionenpaar x = φ(t), y = ψ(t) alle Stellen (xy), die dem algebraischen Gebilde angehören und in der Umgebung der Stelle (ab) liegen.* »

[18] « *Zwei Elemente des Gebildes mögen äquivalent heissen, wenn sie denselben Mittelpunkt haben und in einer bestimmten Umgebung desselben jede Stelle des einen auch eine Stelle des anderen ist.* »

(resp. non vide) ; s'ajoute une condition d'injectivité. Il explique ensuite comment, si l'on dissymétrise la présentation en essayant d'exprimer *u* en fonction de *z* et non de *t*, on peut distinguer les éléments réguliers, les éléments polaires et les éléments ramifiés (développés en puissances entières d'une fraction de *z*). Outre cette présentation symétrique des éléments faisant intervenir des couples, Weyl reprend de Weierstrass l'étude de changements de paramètre auxiliaire *t*. Techniquement le contenu est le même : deux éléments de configuration sont équivalents s'ils se déduisent l'un de l'autre, au moins sur un voisinage du centre, par un changement de paramètre de la forme $t = c_1\tau + c_2\tau^2 + \ldots$, de rayon de convergence non nul, où $c_1 \neq 0$. Cette définition est toutefois l'occasion pour Weyl d'une digression plus générale : il présente la notion abstraite de relation d'équivalence, et la capacité de l'esprit de former de nouveaux objets en considérant les classes d'équivalences d'objets anciens, ou, de regarder toute relation d'équivalence comme l'égalité. On verra l'importance de ces « définitions par abstraction » (« *Definition durch abstraktion* » [Weyl 1913 7] dans la mise en place intrinsèque des objets-sur. En dépit des similitudes techniques, la présentation de Weyl s'écarte très sensiblement de celle de Weierstrass sur le plan conceptuel. Chez Weierstrass la présentation de la notion de fonction analytique et celle de configuration analytique associée à une équation algébrique à deux variables empruntent des voies différentes : les fonctions analytiques sont (là-dessus Weyl est pleinement fidèle) des collections d'éléments de fonctions d'une variable fixe *z*, éléments liés par prolongement analytique ; la dépendance des éléments envers le plan des *z* et sa topologie (disques, courbes continues) est nécessaire à la liaison des éléments entre eux, liaison permettant de dégager les fonctions analytiques comme des totalités closes. Dans le cas des configurations associées aux fonctions algébriques le point de départ de Weierstrass demeure l'équation $f(x,y) = 0$, la famille de points plongée dans $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ est donc ce qui fournit à la fois la totalité close et la liaison continue (notion de voisinage d'un point) ; le paramètre local *t* n'est donc plus chargé de fournir un plan fixe sur le modèle duquel connecter les éléments de la configuration, les changements de variable sont donc autorisés. Weyl fusionne les éléments des deux approches en ne gardant que les traits garantissant l'intrinséquéité. Premièrement, les configurations analytiques ne sont pas introduites à propos d'équations algébriques, elles constituent une généralisation de la notion de fonction analytique. Les éléments, les « points » de la configuration sont donc des « éléments de fonction » (au sens étendu) et non des points de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$: on est ainsi libéré d'un espace de plongement donné *a priori*. La possibilité de changer de paramètre dans les éléments est par contre reprise de la présentation weierstrassienne des configurations analytiques, ce qui libère de la dépendance envers l'espace d'un paramètre ou d'une variable principale : les « points » de la configuration au sens de Weyl sont les classes d'équivalences d'éléments. La considération de cet ensemble de « points » abstraits et la coupure des liens soit avec un espace de plongement soit avec un espace de paramétrisation unique et global crée toutefois d'importantes difficultés : il faut déterminer ce qui confère à la collection des points et son unité et sa liaison continue. Weyl reprend ici la solution weierstrassienne dans le cas des fonctions analytiques : l'unité d'une configuration analytique sera donnée par le prolongement analytique ; une configuration sera une collection maximale d'éléments liés par prolongement analytique. Cette réponse au problème de l'unité dépend toutefois de l'existence sur la configuration d'une notion de prolongement analytique qui n'est, *a priori*, pas disponible faute d'un espace de paramètre fixe. Weyl utilise la procédure weierstrassienne mais en la localisant : c'est l'espace du paramètre local qui va servir de modèle pour définir sur la configuration une notion de voisinage.

> Soit **e** un élément de fonction et $z = \mathrm{P}(t)$, $u = \mathrm{Q}(t)$ une quelconque de ses représentations, $|t|<r$ ($r>0$) un cercle quelconque où la représentation est *valide* (...). Pour chaque valeur t_0 telle que $|t_0|<r$ on peut ordonner les séries $\mathrm{P}(t)$, $\mathrm{Q}(t)$ selon les puissances de $t' = t\text{-}t_0$ et obtenir une nouvelle paire de séries de puissances $\mathrm{P}'(t')$, $\mathrm{Q}'(t')$ donc un nouvel élément $\mathbf{e_{t0}}$. Nous disons que tous les éléments de fonctions distincts $\mathbf{e_{t0}}$ appartenant aux différents t_0 du cercle $|t_0|<r$ forment un *voisinage analytique* de l'élément originel **e** (= $\mathbf{e_0}$) (…). [Weyl 1913 9][19]

Cette notion semble toutefois dépendre du choix du paramètre t : c'est, au sens strict, un t-voisinage qui est ici défini [Weyl 1913 10]. La situation peut sembler un peu inutilement compliquée, car si τ est un autre paramètre, les t-voisinages et les τ-voisinages d'un même élément **e** ne coïncident pas nécessairement ; on montre que tout t-voisinage contient un τ-voisinage (et, bien sûr, réciproquement). Mais cette complexité est le prix à payer pour un travail intrinsèque, et Weyl montre qu'elle n'a pas d'incidence sur l'objectif, qui est de définir la notion de chemin continu dans la configuration analytique – notion qui remplace celle de prolongement analytique en l'absence d'un espace de paramètre fixe z. On voit que la

[19] « *Es sei **e** ein Funktionselement und z=P(t), u=Q(t) irgendeine darstellung desselben, |t|<r (r>0) irgendein Kreis, in welchem diese Darstellung **gültig** ist (...). Für jeden Wert t_0, für den$|t_0|<r$, können wir dann die Reihen P(t), Q(t) nach Potenzen von t'=t-t_0 umordnen und erhalten so ein neues Potenzreihenpaar P'(t'), Q'(t') und damit ein neues Funktionselemente e_{t0}. Von allen so den verschiedenen im Kreise $|t_0|<r$ gelegenen t_0 zugehörigen Funktionselementen e_{t0} sagen wir, sie bilden eine **analytische Umgebung** des ursprünglichen Elementes **e** (=$\mathbf{e_0}$) (...)* »

reformulation de Weyl tend à faire passer des notions fonctionnelles, d'objets-sur (le plan des *z*), à des notions plus géométriques : la configuration est un objet-lieu, caractérisée par sa connexité par arc. Plus précisément, elle est une composante connexe de l'espace de tous les éléments. Le paragraphe se clôt en effet sur la série des analogies point / élément, voisinage d'un point / voisinage analytique, courbe continue / suite analytiquement continue d'éléments de fonctions ayant présidé à la fixation (*festsetzung*) du sens des notions abstraites. Puis il élargit :

> L'espace [*Raum*] des éléments de fonctions possède selon cette fixation une structure [*Struktur*] essentiellement différente de celle de l'espace tridimensionnel ordinaire : alors que l'espace ponctuel forme une unique totalité connexe (deux quelconques de ses points peuvent être reliés par une courbe continue), l'espace (de dimension infinie) des éléments de fonctions est morcelé en un nombre infini de « strates » (bidimensionnelles) ; chacune de ces strates forme en elle-même une totalité continûment (i.e. ici analytiquement) connexe, aucune n'est liée à aucune autre en aucun point ; ces « strates » sont justement les configurations analytiques. [Weyl 1913 11][20]

La reconstruction de l'approche weirstrassienne s'achève sur l'étude des liens entre la notion de fonction analytique (présentée par Weyl au §1) et celle de configuration analytique (§2). Bien que présentée abstraitement comme collection d'éléments (au sens restreint), la « fonction analytique » conservait un aspect fonctionnel en ceci qu'elle possédait en chaque point une « valeur ». Weyl établit qu'en partant d'une configuration analytique et en éliminant les pôles et les points de ramification, on obtient l'analogue d'une fonction analytique qu'on peut nommer *z*. Il montre aussi que, réciproquement, toute fonction analytique peut être prolongée, de manière unique, en une configuration analytique.

ii. Lecture de Hilbert.

En un sens, Weyl pourrait s'arrêter à la notion de surface donnée par celle de configuration analytique : la notion de voisinage y est définie et permet donc de développer les notions

[20] « *Der Raum der Funktionselemente besitzt nach diesen Festsetzung eine wesentlich andere Struktur als der gewöhnliche dreidimensionale Raum : während nämlich der Punktraum ein einziges zusammenhängendes Ganze ausmacht (je zwei seiner Punkte lassen sich durch eine stetige Kurve verbinden), zerfällt der unendlich-dimensionale Raum der Funktionselemente in unendlich viele (zweidimensionale) « Schichten » ; jede solche Schicht für sich ist ein stetig (d.h. hier : analytisch) zusammenhängendes Ganze, aber die einzelnen Schichten stehen untereinander an keiner Stelle in Verbindung ; diese « Schichten » sind eben die analytischen Gebilde.* »

topologiques, la notion de fonction méromorphe sur une telle configuration est immédiate. Toutefois, peut-être pour mieux distinguer les deux niveaux de structure topologique et analytique, mais aussi pour pouvoir introduire des surfaces – tel les revêtements d'une surface donnée – dont les points ne sont pas naturellement donnés comme des éléments de fonction, Weyl emprunte une voie plus générale et abstraite en s'inspirant tout d'abord d'un travail de son maître Hilbert. Le contexte de l'article que Hilbert fait paraître en 1902 sur les fondements de la géométrie n'est pas, il s'en faut de beaucoup, la théorie des fonctions algébriques d'une variable complexe, ni même la théorie des fonctions. Il s'agit pour Hilbert d'approcher les géométries planes en un sens restreint – euclidienne, non euclidienne elliptique et hyperbolique – sous l'angle des groupes de déplacements. Après les réflexions de Riemann et Helmholtz, la caractérisation des groupes associés à ces géométries a été conduite par Lie, nous dit Hilbert, mais en supposant les transformations différentiables et engendrées par les transformations infinitésimales ; l'objectif est de caractériser ces géométries par des propriétés de groupe ne faisant appel qu'à la continuité. Pour atteindre ce but, Hilbert commence par préciser la nature de l'espace sur lequel les groupes vont agir. Dans la définition qui suit, le plan numérique est le plan repéré par deux coordonnées cartésiennes réelles, un domaine de Jordan est un domaine du plan numérique limité par une courbe continue fermée sans point double.

> Définition du plan. Le plan est un système de points. Chaque point A détermine certaines parties du système de points, auxquelles il appartient lui-même et qui s'appellent les voisinages du point A.
>
> Les points d'un voisinage sont toujours applicables de manière inversiblement univoque sur un certain domaine de Jordan du plan numérique. Dans ce domaine de Jordan, tout domaine de Jordan comprenant le point A est à son tour un voisinage de A. On dira que le domaine de Jordan est une image de ce voisinage. Considérons deux images différentes d'un voisinage, la transformation inversiblement univoque ainsi obtenue entre les domaines de Jordan est continue.
>
> Soit B un point quelconque dans un voisinage de A, ce voisinage est alors également un voisinage de B.
>
> Soit deux voisinages quelconques d'un point A, il existe toujours un voisinage de A qui leur est commun.

Si A et B sont deux points de notre géométrie, il existe alors toujours un voisinage contenant simultanément A et B . [Hilbert1902 234][21]

On pourrait s'étonner de voir le terme « plan » dans cette définition qui semble englober toute variété topologique bidimensionnelle. Hilbert précise tout de suite :

> Ces demandes fournissent, je crois, pour le cas bi-dimensionnel, la définition précise des concepts désignés par Riemann et Helmholtz par « multiplicité multiplement étendue » et par Lie par « multiplicité numérique », et sont le fondement de toutes leurs recherches. [Hilbert 1902 235][22]

Il poursuit en définissant comme plan au sens strict un plan – au sens large ci-dessus – pouvant être plongé comme partie d'un plan numérique. Cette double définition du plan se comprend dans le contexte : le plan de la géométrie elliptique n'est un plan qu'au sens large, contrairement à ceux des géométries euclidiennes ou hyperbolique, la notion large est donc nécessaire ici à Hilbert ; sans ce souhait d'englober le plan projectif réel (le « plan » de la géométrie elliptique), cette définition intrinsèque extrêmement sophistiquée se comprendrait mal. Cette définition générale des multiplicités deux fois étendues – nous dirons « plan » avec Hilbert et « surface » avec Weyl – appelle bien sûr quelques commentaires – pour sa place générale dans l'histoire de la notion de variété et pour son rôle de modèle pour Weyl. Remarquons tout d'abord qu'il s'agit d'une définition axiomatique (une liste de *demandes*) n'utilisant que le langage ensembliste : on se donne un ensemble dont les éléments sont appelés « points » mais n'ont pas à être caractérisés ; les seules notions utilisées – outre la topologie du plan numérique – sont celles de partie, d'élément, de bijection. La notion fondamentale à définir est celle de « voisinage d'un point ». Notons que Hilbert aurait pu choisir de définir celle de voisinage (ou d'ouvert) pour ensuite préciser qu'il nomme voisinage d'un point tout voisinage contenant ce point : la demande « Soit B un point quelconque dans un voisinage de A, ce voisinage est alors également un voisinage de B » caractérise en effet les voisinages comme voisinages de chacun de leurs points. Hilbert choisit

[21] « *Definition der Ebene. Die Ebene ist ein System von Punkten. Jeder Punkt A bestimmet gewisse Theilsysteme von Punkten, zu denen er selbst gehört und welche Umgebungen des Punktes A heißen. Die Punkte einer Umgebung lasse sich stets umkehrbar eindeutig auf die Punkte eines gewissen Jordanschen Gebietes in der Zahlenebene abbilden. Jedes in diesem Jordanschen Gebiete enthaltene Jordansche Gebiet, welches den Punkt A umschließt ist wiederum eine Umgebung von A. Das Jordansche Gebiet wird ein Bild jener Umgebung genannt. Liegen verschiedene Bilder einer Umgebung vor, so ist die dadurch vermittelte umkehrbar eindeutig Transformation der betreffenden Jordanschen Gebiete aufeinander eine stetige. Ist B irgend ein Punkt in einer Umgebung von A auch zugleich eine Umgebung von B. Zu irgend zwei Umgebungen eines Punkt A giebt es stets eine solche Umgebung des Punktes A die beiden Umgebungen gemeinsam ist. Wenn A und B irgend zwei Punkte unserer Geometrie sind, so giebt es stets eine Umgebung die beide Punkte A und B gleichzeitig enthält.* »

toutefois l'approche *centrée* dans laquelle chaque partie du type « voisinage » est syntaxiquement associée à un point, ce qui lui évite d'avoir à imposer, entre autres, que les voisinages recouvrent l'espace. Le point de départ est la notion de domaine de Jordan qui, contrairement à celle de disque ouvert, est topologiquement stable (théorème de Jordan). On voit clairement le rôle des bijections dans le transport de structure : les voisinages dans l'ensemble abstrait sont les parties mises en bijections avec les domaines de Jordan ; la compatibilité des différentes structures induites par différentes bijections fait l'objet de la demande : « Considérons deux images différentes d'un voisinage, la transformation inversiblement univoque ainsi obtenue entre les domaines de Jordan est continue. » L'allure locale donnée par les cartes ne garantit pas la connexité pour laquelle un axiome est donc ajouté : « Si A et B sont deux points de notre géométrie, il existe alors toujours un voisinage contenant simultanément A et B. » Nous ne présentons pas ici en détail la suite de l'article de Hilbert : il présente quelques axiomes portant sur les « déplacements » (homéomorphismes du « plan » conservant l'orientation) ; si ces déplacements (1) forment un groupe, (2) possèdent assez de rotations (i.e. de déplacements ayant un point fixe) et (3) forment une totalité stable par passage à la limite (fermée donc), alors ils définissent une géométrie qui est l'une des trois voulues. Notons que les propriétés (2) et (3) sont exprimées non directement au moyen d'une topologie sur l'espace des déplacements, mais en utilisant la topologie du plan sur lequel le groupe agit.

2. Structure topologique.

Cet aspect groupe-théorique du fondement de la géométrie ne concerne pas Weyl ; c'est par contre de la présentation hilbertienne de la notion de surface topologique que Weyl reprend à la fois l'esprit et, dans une large mesure, la lettre :

> Le concept de « variété bidimensionnelle » ou « surface » ne doit donc pas selon nous être lié à l'idée de point de l'espace, mais doit acquérir une signification bien plus générale et abstraite. Lorsqu'une totalité [*Gesamtheit*] quelconque de choses [*Dinge*] est donnée (qui jouerons le rôle de « points ») et qu'il existe entre elles, selon leur définition, une liaison continue semblable à celle entre les points d'un plan, on parle de variété bidimensionnelle.

[22] « *Diese Forderungen enthalten, wie ich glaube, für den Fall zweier Dimensionen die scharfe Definition des Begriffes, den Riemann und Helmholtz als « mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit » und Lie als « Zahlenmannigfaltigkeit » bezeichneten und ihren gesammten Untersuchungen zu Grunde legten.* »

Or toutes les notions relatives à la continuité peuvent être ramenées au seul concept de voisinage, la déclaration [*Erklärung*] d'une variété bidimensionnelle est donc double :

1. Donnée [*Angabe*] des choses qui vaudront pour des « points »
2. Stipulation [*Erklärung*] du concept de « voisinage »

Précisément : quand dit-on qu'une variété bidimensionnelle **F** est donnée ? Dans le cas suivant :

*Soit une totalité de choses nommées « points de la variété **F** ». Pour chaque point **p** de la variété **F** sont définis certains ensembles de points, les « voisinages de **p** sur **F** ». Chaque voisinage $\boldsymbol{U_0}$ d'un point $\boldsymbol{p_0}$ de la variété **F** doit contenir $\boldsymbol{p_0}$ lui-même, et une application inversiblement univoque sur l'intérieur d'un cercle euclidien usuel $\boldsymbol{K_0}$ (appliquant $\boldsymbol{p_0}$ sur le centre du cercle) doit être donnée, telle que :*

1. *si **p** est un point quelconque de $\boldsymbol{U_0}$ et **U** un voisinage de **p** sur **F** constitué uniquement de points de $\boldsymbol{U_0}$, l'image de **U** (dessinée dans K_0 par cette application) contient le point image de **p** comme point intérieur ; c'est-à-dire, qu'on peut décrire un cercle **k** autour du point image* p *de **p** dont chaque point est image d'un point de **U**.*
2. *si **K** est l'intérieur d'un cercle de centre* p *contenu dans $\boldsymbol{K_0}$, il existe toujours un voisinage **U** de **p** sur **F** dont l'image est entièrement contenue dans **K**.* [Weyl 1913 17][23]

Les axiomes sont plutôt plus simples que ceux de Hilbert, ils sont d'ailleurs insuffisants et Weyl les corrige dans les éditions ultérieures. Par exemple en 1923 est ajouté l'un des axiomes qui était donné par Hilbert : étant donnés deux voisinages d'un même point, il existe un voisinage du point contenu dans les deux premiers. En 1955 est ajouté, par exemple, un

[23] « *Der Begriff der « zweidimensionalen Mannigfaltigkeit » oder der « Fläche » soll für uns also nicht an die Idee des Raumpunktes geknüpft sein, sondern eine viel allgemeinere abstrakte Bedeutung erhalten. Wenn überhaupt irgend ein Gesamtheit von Dingen (die die Rolle der « Punkte » übernehmen werden) gegeben ist und definitionsgemäß zwischen ihnen ein ähnlicher kontinuierlichen Zusammenhang besteht wie zwischen den Punkten einer Ebene, so sprechen wir von einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit. Da sich aber alle Kontinuitätsbegriffe auf den einen der Umgebung zurückführen lassen, so gehört zur Erklärung einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit zweierlei : 1. Angabe derjenigen Dinge, welche als « Punkte » der Mannigfaltigkeit gelten sollen ; 2. Eine Erklärung des Begriffes der « Umgebung ». In präziser Fassung : wann wollen wir sagen, es sei eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit F gegeben ? Wenn folgendes der Fall ist : Gegeben eine Gesamtheit von Dingen, die « Punkte des Mannigfaltigkeit F » heißen. Zu jedem Punkt **p** der Manigfaltigkeit F sind gewisse Mengen von Punkten der Mannigfaltigkeit als « Umgebungen von **p** auf F » definiert. Jede Umgebung U_0 eines Punktes $\boldsymbol{p_0}$ der Mannigfaltigkeit auf F muß $\boldsymbol{p_0}$ selbst enthalten und eine umkehrbar eindeutige Abbildung auf die inneren Punkte eines gewöhnlichen Euklidischen Kreises K_0 (wobei $\boldsymbol{p_0}$ in den Mittelpunkt des Kreises übergeht) von den folgenden Beschaffenheit gestatten : 1. Ist **p** ein Punkt von U_0 und U eine nur aus Punkten von U_0 bestehende Umgebung von **p** auf F, so enthält das (durch jene Abbildung in K_0 entworfene) Bild von U den Bildpunkt von **p** im Innern ; d.h. es läßt sich um den Bildpunkt p von **p** eine Kreisfläche k beschreiben, sodaß jeder Punkt von k Bild eines Punkt von U ist ; 2. Ist K das Innere irgend eines ganz in K_0 gelegenen Kreises mit dem Mittelpunkt p, so gibt es stets eine Umgebung U von **p** auf F, deren Bild ganz in K liegt.*

axiome d'existence associé à la demande (1) : si U_0 est un voisinage de $\mathbf{p_0}$ contenant un point **p**, il existe un voisinage de **p** entièrement contenu dans U_0 ; un axiome de séparation apparaît aussi alors. Mais ce n'est pas l'imperfection technique ni l'histoire de la topologie générale qui nous intéresse au premier chef ici [24]. Remarquons tout d'abord une simplification par rapport aux axiomes de Hilbert : l'abandon de la référence aux domaines de Jordan. Les voisinages au sens de Weyl doivent avoir pour contrepartie des ouverts du plan, ces derniers étant caractérisés par la propriété que leurs points leurs sont intérieurs ; cette notion de point intérieur n'utilise que les disques. Cette économie conceptuelle est d'ailleurs un trait général de ce travail de Weyl. En topologie plane, ses axiomes n'utilisent pas de « gros » théorèmes comme celui de Jordan. On voyait aussi chez Osgood que la théorie des surfaces de Riemann reposait non seulement sur le théorème de Jordan mais aussi sur quelques théorèmes fondamentaux de la théorie de la représentation conforme ; cette opinion est encore celle de Bieberbach, pourtant bon lecteur de Weyl, dans l'article qu'il donne pour l'*Encyclopädie* en 1920 sur les recherches récentes en théorie des fonctions de variables complexes [Bieberbach 1920]. On le verra, pas plus que le théorème de Jordan pour les surfaces au sens topologique, les théorèmes relatifs à la représentation conforme des domaines simplement connexes n'interviennent dans la mise en place par Weyl du concept de surface analytique. Deuxièmement, l'idée qui préside à la mise en place des axiomes est assez claire : les voisinages doivent être homéomorphes à des disques ouverts du plan. Les demandes (1) et (2) désignent comme parties de F à appeler « voisinages » exactement celles rendant les bijections (1) ouvertes et (2) continues. Pour qui possède la caractérisation des homéomorphismes par les voisinages la construction de Weyl est transparente et il s'agit bien de ce qu'on nommera plus tard un transport de structure (autre terme *méta* !). Qu'il s'agisse là de la démarche de Weyl ne fait aucun doute, la lecture de la suite du paragraphe 4 le confirme : Weyl y utilise la notion de voisinage pour mettre en place les notions et théorèmes usuels de topologie générale, et peut, après avoir défini les applications continues et les applications ouvertes (*Gebietsstetig*), conclure que l'on peut définir les surfaces comme des domaines dont les voisinages sont applicables bijectivement, continûment et de manière ouverte sur les disques ouverts du plan [Weyl 1913 20]. Troisième remarque, la présentation

[24] Pour être un peu complet sur ce point, signalons une autre maladresse de Weyl dans la suite de ce paragraphe. Il « démontre » que l'image d'une partie fermée par une application continue est fermée. L'annexe de 1923 corrige ce point en précisant qu'il faut se limiter aux fermés « *ganz im Endlichen gelegene* », choix de vocabulaire d'ailleurs assez malheureux bien que traditionnel. Une certaine confusion demeure en effet en 1913 entre deux notions de « fermé » : la définition n'est pas la même pour les surfaces fermées (il s'agit alors de la compacité : tout système infini de point admet un point d'accumulation) et les parties fermées d'une surface

de Weyl est plutôt plus « centrée » que celle de Hilbert. On avait vu ce dernier amorcer le décentrement, passer donc de la notion de « voisinage *d'un* point » à celle d'ouvert, en remarquant qu'un voisinage d'un point est aussi voisinage de tous les points qu'il contient. Ce décentrement permettait aussi d'étudier, sans finalement de référence au « centre » du voisinage, la question des intersections de voisinages et de compatibilité des structures induites par différentes cartes. Bien que ce ne soit pas le choix fait par Hilbert, il aurait pu aller jusqu'à oublier l'association entre voisinage et centre : la structure topologique repose entièrement sur la notion de voisinage, les voisinages peuvent être caractérisés à partir de voisinages suffisamment petits pour tenir dans une partie en bijection avec un disque [25] ; on aurait trouvé la présentation par recouvrement (non centré) et condition de compatibilité dans les intersections. Loin d'aller dans cette direction du décentrement en faisant émerger la figure du recouvrement ouvert, Weyl est plus strictement attaché que Hilbert à l'association entre un voisinage et un point distingué (que nous nommions, par commodité, son centre). On verra que ce mode de saisie qui met l'accent sur la caractérisation par le comportement au voisinage de chaque point et, pour user de termes anachroniques, le filtre des voisinages d'un point et les germes de fonctions (ou autres objets-sur), est un trait général de cet ouvrage de Weyl, qui y fait régner une atmosphère qu'un lecteur d'après 1950 peut qualifier de « faisceautique ». Ce mode de saisie, si heureuse dans le cas des objets-sur ou de la structure analytique, l'est sans doute moins pour celui de la topologie, et le fait que Weyl passe à côté des conditions de séparation ou relatives aux intersections est sans doute attribuable à cette prédominance du voisinage centré, du voisinage comme voisinage *d'un* point … à chaque forme d'attention son risque d'*ablépsie* propre.

On doit faire porter une dernière série de remarques sur la question de l'accès au global dans une théorie dont la stratégie de définition axiomatique des objets consiste à ne formuler que des demandes locales. On pourrait tout d'abord relever qu'à aucun moment on ne voit Weyl utiliser la thématique du local/global ni aucun terme *méta* associé, au premier rang desquels *im Kleinen* / *im Grossen*. La remarque n'est toutefois par pertinente car on verra Weyl utiliser ces termes dans le même contexte quelques pages plus loin ; leur absence ici ne nous semble pas significative. Plus important, l'accès technique au global est assuré en 1913 par les triangulations. Weyl précise, quelques pages après ses axiomes et la mise en place des principales notions de topologie ensembliste, qu'il se limite aux variétés triangulables. Dans

(caractérisées par la stabilité du passage à la limite dans les suites de point). Dans tout le texte, « surface fermée » est donc à comprendre comme surface compacte, Weyl le signale au lecteur en 1955.

[25] Comme chez Hilbert, il s'agit de ce qu'on nommerait aujourd'hui une base de la topologie.

les querelles ou les incertitudes qui grèvent le champ de la topologie naissante en 1913, il adopte le point de vue mixte de Brouwer, par opposition à un point de vue strictement combinatoire dans lesquels les objets sont des polyèdres abstraits – des complexes simpliciaux – à étudier sans utiliser les outils de topologie ensembliste. Pour Weyl, les objets sont, on l'a vu, des variétés topologiques ; les « triangles » sont des applications injectives et continues depuis un triangle plan vers la variété. La pertinence de la description combinatoire se manifeste dans ce que la topologie de la surface est entièrement décrite par le mode d'agencement des triangles d'une triangulation ou *schéma* de la variété [Weyl 1913 29], d'où une description particulièrement aisée dans le cas fermé (entendre : compact) où le schéma est fini. Une limite théorique de la méthode *rein kombinatorisch* est toutefois soulevée : on ne sait pas décider si deux schémas représentent la même surface, à homéomorphisme près [Weyl 1913 29]. Au delà des questions de fondement ou de priorité, topologies combinatoires et ensemblistes entretiennent aussi un lien technique grâce à la notion de raffinement d'une triangulation par subdivision barycentrique permettant d'obtenir des triangulations ξ arbitrairement fines (*beliebig fein*) ; la définition de cette dernière notion prend la forme suivante :

> Soit **p** un point quelconque de F, U un voisinage quelconque de **p** sur F, il existe toujours un indice *n* pour lequel le triangle élémentaire de ξ_n contenant **p** (…) est lui-même entièrement contenu dans U (…).[Weyl 1913 31][26]

Ici encore ce n'est pas une notion de recouvrement ouvert qui sert à articuler les aspects ensemblistes (conçus en termes de local-centré) et combinatoires (permettant le traitement technique du global). C'est l'un des points sur lesquels l'évolution est notable entre les deux premières éditions (1913, 1923) et l'édition refondue de 1955. Dans cette dernière le recours aux triangulations disparaît au profit d'un usage systématique des recouvrements ouverts, aussi bien pour les questions purement topologiques que lorsqu'il s'agit d'intégrer sur la variété. La comparaison des paragraphes 5 de 1913 et de 1955 l'illustre bien. Ce paragraphe est consacré à des exemples de surfaces : plan, plan projectif, bande de Möbius (défini entre autres au moyen de l'action d'un groupe dans le plan), tore … sont les exemples communs aux deux éditions. Par contre, là où en 1913 est évoquée la possibilité de se donner une surface uniquement en écrivant un schéma de triangulation vérifiant certaines propriétés [Weyl 1913 29], on trouve en 1955 :

[26] « *ist* ***p*** *ein beliebiger Punkt von F, U eine beliebige Umgebung von* ***p*** *auf F, so gibt es immer einen Index n derart, daβ dasjenige Elementardreieck (…) von* ξ_n, *in welchem* ***p*** *liegt, selber ganz in U enthalten ist (…).* »

> Le recouvrement [*Überdeckung*] d'une surface par une suite dénombrable de voisinages peut être convertie en une *définition abstraite de la surface* (…) [Weyl 1955 27][27]

Il suffit de se donner une collection dénombrable de disques plans et des règles d'identification par homéomorphismes partiels vérifiant certaines hypothèses de transitivité. Une dernière remarque enfin, simple mais fondamentale, sur laquelle nous aurons à revenir plus loin. Les surfaces sont caractérisées par Weyl par leur structure locale et l'on comprendra en lisant le développement de l'exposé weylien combien ce choix est plus qu'un retour à la « nature de choses » – une surface est un objet localement assimilable à un disque. L'approche de Weyl ne relève pourtant en rien du point de vue universellement local, la raison semble si simple qu'elle en devient transparente et tient tout entière dans le premier point de stipulation/déclaration (*Erklärung*) : « Donnée [*Angabe*] des choses qui vaudront pour des ‘‘ points ’’ ». Ce point de départ ne permet qu'une écriture syntaxiquement globale, la surface n'est en aucun cas un horizon dont le mode de donation coïncide avec le mode de parcours progressif ; elle est là avant même qu'on n'en sache quoi que ce soit. Ce qui la limite, ce qui en fait à la fois une unité et une totalité, n'est pas non plus une équation, comme souvent dans le cas des fonctions algébriques d'une variable complexe ou pour les sous-variétés d'espaces numériques considérées par la géométrie différentielle d'alors.

3. Structure analytique.

De même que la surface ne peut emprunter sa topologie à un espace ambiant ou au plan d'une variable *z* au-dessus duquel elle serait donnée, elle ne peut leur emprunter la structure analytique. C'est ici l'analyse du rôle des fonctions *z* et *u* sur une configuration algébrique G – au sens donné à ce terme au §2 de l'ouvrage – que Weyl choisit comme point de départ pour faire sentir ce qui manque à la définition d'une surface topologique pour que la notion de fonction analytique sur la surface y ait un sens. La définition axiomatique est ici aussi précédée d'un long passage introductif dans lequel apparaît pour la première fois explicitement *im Kleinen* :

> Lorsqu'on affirme que z et u sont des fonctions analytiques sur la surface G il est essentiel que G *ne soit pas donnée simplement comme surface au sens de l'Analysis situs*. Car si l'on ne considère sur une surface que les propriétés relevant de l'analysis

[27] « *Die Überdeckung einer Fläche mit einer abzählbaren Folge von Umgebungen läßt sich dadurch in eine* abstrakte Definition der Fläche *verwandeln* (…) »

situs, on peut bien parler de fonctions continues mais pas de fonctions « continûment dérivables », « analytiques » (non plus que « rationnelle entière ») et autres. Pour pouvoir mener la théorie des fonctions analytiques sur une surface F de manière analogue à celle menée dans le plan complexe, on doit plutôt (outre la définition de la surface) fournir une stipulation fixant le sens de l'expression « fonction analytique sur la surface » de telle sorte que toutes les propositions de la théorie des fonctions analytiques dans le plan qui sont valides « im Kleinen » se transfèrent [*übertragen*] à ce concept plus général. Les propositions valides « im Kleinen » sont celles dont la justesse n'est affirmée que pour un certain voisinage d'un point, voisinage sur l'étendue [*Größe*] duquel la proposition ne donne aucun renseignement. Par une telle stipulation du sens de l'expression « fonction analytique », la surface devient une **surface de Riemann**. Cette manière de voir le concept de surface de Riemann fut développé pour la première fois en toute clarté par F. Klein dans son livre *Über Riemanns Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integralen* ; elle est plus générale que celle utilisée par Riemann lui-même dans son travail fondamental sur la théorie des fonctions analytiques. On ne peut toutefois douter que cette version généralisée ne dégage l'Idée riemannienne dans toute sa force et sa simplicité. D'ailleurs, Riemann en a lui-même posé les fondements par conceptions qu'il développe dans son *Habilitationsvortrag* sur le concept de variété à *n* dimensions, et l'on peut tenir pour certain que, pour Riemann, les idées déployées dans ce travail sont en relation étroite avec ses recherches en théorie des fonctions, quoiqu'il ne fasse pas ressortir ce lien explicitement. [Weyl 1913 35][28]

[28] « *Für die Behauptung, daß* z *und* u *analytischen Funktionen auf der Fläche G sind, ist es wesentlich, das G* nicht bloβ als eine Fläche im Sinne der Analysis situs gegeben ist. *Denn auf einer Flächen, von der allein Analysis-situs Eigenschaften in Betracht gezogen werden, kann man wohl von stetigen Funktionen sprechen, nicht aber von « stetige differentiierbaren », « analytischen » (oder gar « ganz rationalen ») Funktionen oder dergl. Um auf einer Fläche F analytische Funktionentheorie in analoger Weise wie in der komplexen Ebene treiben zu können, muß vielmehr (außer der Definition der Fläche) eine Erklärung abgegeben sein, durch welche der Sinn des Ausdrucks « analytische Funktion auf der Fläche » so festgelegt wird, daß alle Sätze über analytischen Funktionen in der Ebene, die « im Kleinen » gültig sind, auf diesen allgemeineren Begriff übertragen. « Im Kleinen » gültige Sätze sind dabei solche, deren Richtigkeit immer nür für eine gewisse Umgebung eines Punktes, über deren Größe der Satz selbst keine Auskunft gibt, behauptet wird. Durch eine solche Erklärung des Ausdrucks « analytische Funktion auf F » wird die Fläche F zur* ***Riemannschen Fläche****. Diese Auffasung des Begriffs der Riemannschen Fläche, in anschaulicher Form zuerst von F. Klein in seiner Schrift « Über Riemanns Theorie des algebraischen Funktionen und ihrer Integrale » entwickelt, ist allgemeiner als diejenige, deren sich Riemann selbst in seinen grundlegenden Arbeiten über die Theorie der analytischen Funktionen bedient. Es kann aber kein Zweifel sein, daß erst bei dieser verallgemeinerten Fassung die Riemannschen Ideen in ihrer vollen Einfachheit und Kraft hervortreten. Zu ihr hat übrigens Riemann selbst durch die in seinem Habilitationsvortrag entwickelten, die n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten betreffenden Begriffsbildungen den Grund gelegt, und es darf wohl als sicher angenommen werden, daß für Riemann die in*

Ce n'est pas le couple *im Kleinen / im Grossen* qui intervient dans la définition axiomatique des objet-lieux, seul *im Kleinen* intervient. Le sens de ce terme est explicité, preuve qu'il en est encore besoin en 1913, d'une manière que ne démentirait pas Osgood. Pour ne pas dénaturer ce passage typique par son articulation entre préambule épistémologique et définition axiomatique, achevons de le citer :

> **Définition générale du concept de surface de Riemann** :
>
> *Soit F une surface, si pour chaque point p_0 de F et chaque fonction f(p) dans un voisinage quelconque de p_0 il est stipulé quand f(p) doit être appelée fonction analytique en p_0, alors est donnée une surface de Riemann ^RF, dont les points sont ceux de F. Cette stipulation doit toutefois satisfaire aux conditions suivantes :*
>
> *(1) soit p_0 un point de F, il existe une fonction t(p) analytique non seulement en p_0 (où elle prend la valeur 0) mais aussi en tous les points d'un certain voisinage de p_0, et dessinant dans le plan complexe des t une image de ce voisinage de manière inversiblement univoque et ouverte; une telle fonction s'appelle une **uniformisante locale*** [Ortsuniformisierende] *en p_0.*
>
> *(2) soit f(p) une fonction analytique en p_0 et t(p) une uniformisante locale en p_0, il existe toujours un voisinage U_0 de p_0 dans lequel f(p) peut s'exprimer comme une série entière en t(p)*
>
> $$f(p) = a_0 + a_1 t(p) + a_2 (t(p))^2 + \ldots$$ [Weyl 1913 36][29]

Le premier soin de Weyl est bien sûr de vérifier l'intrinséquéité de cette définition en montrant que le point (2) ne dépend pas du choix de l'uniformisante locale. On retrouve la préférence pour les formulations locales-centrées par opposition à la description par systèmes de cartes (éventuellement en nombre fini dans le cas compact), bien qu'ici les deux points de vue soient techniquement équivalents. Cette saisie centrée contribue à la saveur faisceau-théorique d'une définition de la structure complexe par déclaration du faisceau des fonctions

jenem Vortrag ausgesponnenen Gedanken in enger Beziehung zu sinem funktionentheoretischen Untersuchungen standen, obwohl diese Beziehung von ihm nicht ausdrücklich hervorgehoben werden. »

[29] « ***Allgemeine Definition des Begriffs der Riemannschen Fläche**. Liegt eine Fläche F vor und ist außerdem für jeden Punkt **p_0** von F und jede in irgend einer Umgebung von **p_0** vorhandene Funktion f(**p**) auf F erklärt, wann f(**p**) um Punkte **p_0** regülar-analytische heißen soll, so ist damit eine **Riemannsche Fläche** ^RF gegeben, als deren Punkte die Punkte von F betrachtet werden. Jene Erklärung aber muß den foldenden Bedingungen genügen : 1. Ist **p_0** irgend ein Punkt von F, so gibt es eine Funktion* t(***p***)*, die nicht nur im **p_0** (woselbst sie den Wert 0 besitzt) sondern auch in allen Punkten **p** einer gewissen Umgebung von **p_0** auf F regulär-analytisch und von dieser Umgebung ein umkehrbar-eindeutiges,-gebietsstetiges Bild in der komplexen t-Ebene entwirft ; eine solche Funktion heißt eine Ortsuniformisierende zu **p_0**. 2. Ist f(**p**) irgend eine im Punkte **p_0** regulär-analytische Funktion und t(**p**) eine zu **p_0** gehörige Ortsuniformisierende, so gibt es stets eine Umgebung U_0 von **p_0**, in welcher f(**p**) sich als eine reguläre Potenzreihe in* t(***p***) $f(p) = a_0 + a_1 t(p) + a_2 (t(p))^2 + \ldots$ *darstellen läßt.* »

régulières ; le point (1) permet d'articuler la structure analytique à la topologie – les uniformisantes locales sont des cartes locales pour la structure topologique – et indique une condition de cohérence – une fonction analytique en un point est analytique en tous les points voisins – qui montre le dépassement d'une saisie strictement centrée risquant de rendre les anneaux de germes de fonctions analytiques en différents points tout à fait indépendant les uns des autres ; la direction du regard a ici changé : bien que locale, la condition de cohérence ne *vise* pas un point désigné par le filtre de ses voisinages, le mouvement est au contraire *d'étalement* depuis le point vers un de ses voisinages. Cette définition axiomatique par le faisceau des fonctions régulières permet de donner tout de suite une élégante définition de l'équivalence de deux surfaces de Riemann :

> Soient deux surfaces de Riemann F_1 et F_2. On dit qu'une application ponctuelle de F_1 sur F_2, inversiblement univoque et ouverte, est **conforme** si elle transforme toute fonction analytique en un point quelconque de F_1 en une fonction sur F_2 qui est analytique au point image. (…) Deux surfaces de Riemann applicables conformément l'une sur l'autre sont dites (**conformément**) **équivalentes** et ne seront considérées que comme deux réalisations [*Verwirklichungen*] différentes d'une même et unique surface de Riemann idéale. [Weyl 1913 36][30]

On voit que la définitions axiomatique est immédiatement suivie d'un double travail sous le signe de l'intrinsèque : un travail local garantissant l'intrinséquéité du point (2), donc l'indépendance de la notion de fonction analytique envers une représentation par rapport à une variable particulière ; un travail global définissant la relation d'équivalence permettant de passer des réalisations à la surface « idéale » (« absolue » aurait écrit Weber). On voit combien le choix d'une définition axiomatique ne fixant que des contraintes locales ne relève en rien d'un point de vue universellement local et ne constitue nullement un obstacle à la formulation de propriétés globales ; au contraire, elle permet une caractérisation très rapide d'objets globaux, tels les applications conformes, et de propriétés globales, telle l'équivalence conforme : la simple condition ensembliste de bijectivité est incompatible avec le point de vue universellement local. On notera que cette caractérisation de la structure analytique par le faisceau des fonctions semble s'écarter des formulations classiques dans la tradition riemannienne. Dans la plupart des cas, les auteurs ne se posent tout simplement pas la

[30] « *Sind irgend zwei Riemannsche Flächen F_1, F_2 gegeben, so heißt eine Abbildung, welche F_1 Punkt für Punkt umkehrbar-eindeutig und –gebietsstetig so auf F_2 abbildet, daß jede in irgend einem Punkte von F_1 regulär-analytisch Funktion durch diese Abbildung in eine Funktion auf F_2 übergeht, die im Bildpunkt regulär-analytisch ist, eine **konforme Abbildung**. (...) Zwei Riemannsche Flächen, welche sich konform aufeinander*

question, la notion de surface *au-dessus* d'un plan complexe permettant de l'esquiver. Plus soucieux de fondement conceptuel, Riemann en 1851 et Klein en 1882 avaient toutefois cherché à caractériser les fonctions analytiques, et donc le sol sur lequel elles peuvent pousser, par l'existence d'une notion bien définie de similitude des triangles infinitésimaux ; cette contrainte géométrique trouvait son pendant analytique dans des équations aux dérivées partielles (dites de Cauchy-Riemann). Le terme de « conforme » se retrouve bien chez Weyl mais le contenu géométrique n'est pas ici mis en avant ; plus généralement, Weyl n'installe pas au départ de structure différentiable, n'utilise pas le niveau infinitésimal ni les triangles infinitésimaux qui avaient semblés si parlants à Riemann, Neumann ou Klein. Il ne s'agit bien sûr pas de dire que les outils du calcul différentiel ne seront pas utilisés, mais, on le verra, les opérateurs différentiels seront déduits de la structure analytique. Rappelons enfin que la saisie par uniformisante locale était déjà présente chez Riemann, par exemple lorsqu'au §2 de la première section de sa théorie des fonctions abéliennes il introduit « pour simplifier » [Riemann 1898 109] la notion d'infiniment petit du premier ordre en un point. Cette possibilité de traitement intrinsèque et uniforme en tous les points de la surface n'était toutefois pas le point de départ de sa présentation.

Le renoncement à un espace d'accueil global et donné *a priori*, qu'il soit l'espace usuel pour les surfaces au sens de Klein (en 1881-82) ou le plan complexe pour les surfaces *au-dessus*, conduit donc Weyl a importer sur des ensembles nus des structures locales. Le soin nécessaire à ces importations permet aussi de contrôler strictement la nature de la structure importée, ce qui permet à Weyl de distinguer on ne peut plus clairement des aspects topologiques sous-jacents aux aspects analytiques, alors qu'hormis chez Riemann, une certaine confusion régnait chez nos auteurs. Weyl illustre cet étagement en montrant que tous les tores analytiques, bien que topologiquement équivalents, ne le sont pas conformément, et il introduit à cette occasion la notion de module. Il termine le paragraphe 7 en mêlant les thèmes de la légalité primitive du lieu – et primauté des objet-lieux sur les objets-sur – et le couple local/global :

> Nous concluons ce paragraphe par quelques remarques générales sur l'*idée de surface de Riemann*. L'idée fondamentale qui préside à son introduction n'est en rien limitée à la théorie des fonctions complexes. Une fonction de deux variables réelles x et y est une *fonction dans le plan* ; mais il est tout aussi légitime d'étudier des fonctions sur la sphère, ou sur le tore, ou même sur une surface. Bien sûr, tant que l'on ne s'occupe que des propriétés des fonctions « *im Kleinen* » – et la plupart des considérations de

---

abbilden lassen, werden als ***(konform-) äquivalent*** *und nur als verschiedene Verwirklichungen einer und derselbe idealen Riemannschen Fläche zu betrachten sein.* »

l'analyse s'y rapportent – la notion de fonction de deux variables réelles est assez générale, car le voisinage de chaque point d'une variété bidimensionnelle est représentable par x et y (ou $x+iy$). Toutefois, dès qu'on poursuit vers l'étude du comportement des fonctions « *im Großen* », les fonctions dans le plan ne représentent plus qu'un cas - certes important - mais *particulier* parmi une *infinité d'autres également légitimes* ; Riemann et Klein nous ont appris à ne pas nous en tenir à ce cas particulier. Appliqué à la théorie des fonctions complexes, cela signifie : *avant d'entreprendre l'étude d'un type donné de fonctions, on doit toujours d'abord définir la surface qui fournit le domaine de variabilité de l'argument indépendant ; on doit ensuite stipuler ce qu'on doit appeler « fonction analytique » sur cette surface, par où la surface devient une surface de Riemann ; alors seulement on peut s'attaquer aux fonctions elles-mêmes.* Par conséquent, on doit considérer trois niveaux dans l'étude des propriétés des fonctions : 1. c'est le plus décisif : les qualités d'*Analysis Situs* que possède la surface de Riemann sur laquelle les fonctions existent 2. les propriétés internes de cette surface qui ne relèvent pas du domaine de l'*Analysis Situs* (par exemple, pour des valeurs déterminées d'un « module ») 3. les propriétés (par exemple la répartition et l'ordre des zéros et des pôles) par lesquelles se distinguent les comportements des fonctions sur une même surface de Riemann. [Weyl 1913 42][31]

On est ici proche, tant par les thèmes développés que par le type d'analyse épistémologique des théories, de ce qu'écrit Hadamard à la même période. Un point toutefois marque une différence d'analyse sensible, mais c'est dans le passage précédent qu'on le voit le plus

[31] « *Wir schließen diesen Paragraphen mit einige allgemeinen Bemerkungen über die* Idee der Riemannschen Fläche. *Der Grundgedanke, der ihrer Einführung zugrunde liegt, ist keineswegs auf die komplexe Funktionentheorie beschränkt. Eine Funktion von zwei reellen Veränderlichen x,y ist* eine Funktion in der Ebene *; aber es ist gewiß ebenso berechtigt, Funktionen auf der Kugel, auf dem Torus oder überhaupt auf einer Fläche zu untersuchen als gerade in der Ebene. Solange man sich freilich nur um das Verhalten der Funktionen « im Kleinen » kümmert – und darauf beziehen sich die meisten Betrachtungen der Analysis –, ist der Begriff der Funktion von zwei reellen Veränderlichen allgemein genug, da sich die Umgebung eines jeden Punktes einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit durch x,y (oder x+iy) zur Darstellung bringen läßt. Sobald man aber zur Untersuchung des Verhaltens von Funktionen « im Großen » fortschreitet, bilden die Funktionen in der Ebene einen wichtigen, aber* speziellen *Fall* unter unendlichvielen andern gleichberechtigen *; Riemann und Klein haben uns gelehrt, bei diesem speziellen Fall nicht stehen zu bleiben. Auf die komplexe Funktionentheorie angewendet, heißt das :* bevor man zum Studium irgendeinen Gattung von Funktionen schreitet, muß immer zunächst diejenige Fläche definiert sein, die das Variabilitätsgebiet des unabhängigen Arguments abgibt ; darauf muß erklärt werden, was auf dieser Fläche « analytische Funktion » heißen soll, wodurch die Fläche zur Riemannschen Fläche wird ; und nun erst kann man sich an die Funktionen selbst heranmachen. *Dementsprechend hat man an den Funktionen Eigenschaften dreier verschiedener Stufen zu beachten : 1. Und das sind die einschneidendsten : die Analysis-situs-Qualitäten der Riemannschen Fläche, auf der die Funktionen existieren, 2. Die inneren, nicht dem Bereich der Analysis situs angehörigen Eigenschaften dieser Riemannschen Fläche (z.B. bestimmter Wert eines « Moduls »), 3. Diejenigen Eigenschaften (wie etwa Lage und Ordnung der Nullstellen und Pole), durch die sich Funktionen hinsichtlich ihres Verhaltens auf derselben Riemannschen Fläche unterscheiden.* »

clairement. L'équivalence locale des variétés bidimensionnelle était pour Hadamard à l'origine d'un manque à regarder, elle est au contraire pour Weyl une ressource. C'est ce qu'il expose dans le préambule à la définition de la structure analytique : l'équivalence locale permet de *transférer* (*übertragen*) les définitions et propriétés locales déjà connues dans le plan complexe. La définition axiomatique n'est que le déploiement technique de cette idée d'équivalence locale.

On peut terminer sur quelques remarques plus générales sur la singularité des définitions axiomatiques de Weyl dans la longue histoire des reformulations de la notion de surface de Riemann. L'idée d'équivalence locale était présente depuis le départ, si évidente en un sens qu'il n'y avait rien à en dire [32]. La théorie commençait, par exemple en 1851 chez Riemann, quand on cherchait à décrire la manière dont une surface (le lieu d'une variabilité bidimensionnelle) était *au-dessus* du plan des *z* : se dévoilaient alors des contours, des points de ramification, des échanges de feuillets le long de circuits etc. La présentation standard issue de Neumann consiste à transformer cette description en procédé de construction, coupures et recollements, un procédé de construction que de longues séries d'exemples enseignent à mettre en œuvre dans chaque cas particulier. Cette description / construction fournissait un mode d'accès *général* à chaque objet *particulier*, et permettait de distinguer, après coup, parmi les renseignements caractérisant une surface particulière, les renseignements locaux des renseignements globaux – c'est du moins ce à quoi on aboutit explicitement chez Osgood ; cette description / construction donne forme – *informe* au sens premier – à ce concept insaisissable et quasiment vide de variabilité bidimensionnelle. En cherchant le détachement envers tout espace d'accueil global Weyl doit travailler au niveau où, pour ses prédécesseurs, il n'y avait encore rien à dire, d'où un aspect général de sa présentation qui a dû surprendre les contemporains : le travail axiomatique sophistiqué sur la notion de surface, topologique et analytique, semble faire fi du niveau global et ne donne guère de renseignement sur la forme des objets ; on ne sait finalement encore rien de cet objet qui est défini de manière axiomatique, par opposition à la liste de renseignements dont on dispose dans la description génétique. C'est que la saisie par définition axiomatique procède d'un *pas de recul* épistémologique : la définition axiomatique ne répond pas directement à la question « qu'est-ce qu'une surface de Riemann ? », mais à la question « qu'est-ce que se

[32] Ce qui ne signifie nullement qu'il n'y a pas matière à étudier, pour l'historien, dans le mode de saisie de ce quasiment indicible, en particulier sur la question de la discernabilté et l'autonomisation des niveaux infinitésimaux et locaux.

donner une surface de Riemann ? », ce point est explicite dans le préambule à la définition des surfaces toplogiques [Weyl 1913 17]. La définition présente non les propriétés caractéristiques des surfaces mais les propriétés caractéristiques des stipulations [*Erklärungen*] de surface : forme de la théorie plus que forme de l'objet. *Im Kleinen* et *im Grossen* jouent certes toujours le rôle *méta* qu'ils jouaient chez Osgood, mais trouvent ici l'occasion d'entrer *plus profondément* dans un texte mathématique écrit différemment. Le niveau *méta*, facultatif et éclairant, accompagnait l'enchaînement des énoncés, dans le meilleur des cas le guidait. Par le pas de recul qu'elle représente, la définition axiomatique ménage dans l'exposé un lieu de rencontre entre deux niveaux de discours. Dès lors, quand bien même l'exposé se dispenserait complètement de remarques *méta* sur local et global, les définitions axiomatiques le coulent dans un moule déductif qui, tout entier, exprime la tension du local et du global.

II. Les objets-sur.

1. Données locales, données localisées.

Les faisceau des fonctions régulières étant donné, il permet de considérer d'autres types d'objets-sur. Reprenant les chemins classiques, Weyl commence par étudier le cas d'une fonction régulière au voisinage d'un point sauf peut-être en ce point, établissant la distinction entre singularité artificielle, pôle et point singulier essentiel ; dans la suite du texte, « fonction sur la surface » désigne une fonction méromorphe (univoque) [Weyl 1913 43]. Moins classiquement, son cadre théorique le contraint à vérifier l'invariance de ces notions par changement d'uniformisante locale : ces notions sont donc « invariantes » (*invarianter Begriff* [Weyl 1913 38]), nous disions aussi intrinsèques ou absolues, de même que la notion d'angle en un point de croisement de deux courbes analytique sur la surface [Weyl 1913 39]. Aux fonctions régulières et méromorphes s'ajoutent ensuite les fonctions harmoniques :

> Une fonction réelle U est dite **harmonique** ou une **fonction potentiel** en un point $\mathbf{p_0}$ s'il existe une fonction analytique en ce point dont la partie réelle coïncide avec U sur un certain voisinage de $\mathbf{p_0}$. [Weyl 1913 38][33]

[33] « *Eine reelle Funktion U heißt an einer Stelle* $\mathbf{p_0}$ *eine* **harmonische** *oder* **Potential-Funktion**, *falls es eine in diesem Punkte regulär-analytische Funktion gibt, mit deren Realteil U in einer gewissen Umgebung von* $\mathbf{p_0}$ *übereinstimmt.* »

La préférence pour un traitement local plutôt qu'infinitésimal se voit dans ce que ce n'est qu'ensuite qu'il définit la notion de fonction réelle *n*-fois continûment dérivable en un point de la surface ; l'équation de Laplace est une conséquence et non le point de départ. Il est signalé en passant que les seules fonctions partout harmoniques sur une surface fermée sont les constantes, il en va donc trivialement de même pour les fonctions partout régulières. On voit que Weyl ne prend pas ici la peine de démontrer les propriétés bien connues des fonctions régulières, toute l'énergie est consacrée à la mise en place d'un enchaînement des notions découlant le plus naturellement et directement des axiomes.

La faune des objets-sur s'enrichit au paragraphe 9 des différentielles :

> Alors qu'une « fonction » est caractérisée par le fait de posséder une valeur déterminée en chaque point de son domaine de définition, une **différentielle** d*z* ne possède pas par elle-même une valeur déterminée en un point **p**, mais seulement relativement à la différentielle d*t* d'une uniformisante locale *t* en **p**, valeur notée $(dz)_t^p$; si *t* et τ sont deux uniformisantes locales en un même point **p**, on doit avoir
>
> $$(dz)_t^p = (dz)_\tau^p . \left(\frac{d\tau}{dt} \right)_{t=0}$$ [Weyl 1913 55][34]

Ici Weyl tranche nettement avec l'indistinction entre fonction et différentielle qui régnait dans la voie standard. On avait vu que l'approche « purement arithmétique » amenait à définir à neuf les notions de point, de dérivée, de différentielle : leur dispositif les y contraignait, qui récusait tout usage de la notion de limite. Ici c'est la contrainte de définition de notions « invariantes » par changement d'uniformisante locale qui impose d'introduire les différentielles comme des objets d'une autre nature que les fonctions ; non seulement d'une autre nature que les fonctions *régulières*, mais d'une nature non fonctionnelle au sens le plus large : les différentielles n'ont pas de valeur en un point. On notera le grand laconisme de la définition qui prend la formule usuelle de changement de variable du calcul différentiel pour en faire la base d'une définition axiomatique d'un type nouveau : les différentielles sont données comme des symboles non définis, pour lesquels est stipulé le lien avec les fonctions régulières et le comportement par changement d'uniformisante. Il est ensuite établi que, de manière invariante, on peut associer une différentielle à une fonction ; que le produit d'une différentielle et d'une fonction est une différentielle ; que, bien qu'une différentielle n'ait pas

[34] « *Während eine « Funktion » dadurch charakterisiert ist, daß jeder Stelle ihres Definitionsbereichs einen bestimmten Wert hat, kommt einem* ***Differential*** *dz an einer Stelle* ***p*** *nicht an sich, sondern nur im Verhältnis zu dem Differential dt einer jeden zu* ***p*** *gehörigen Ortsuniformisierende* t *ein bestimmter Wert* $(dz)_t^p$ *zu ; sind t,* τ *zwei zu derselben Stelle* ***p*** *gehörige Ortsuniformisierende, so muß dabei stets (...) sein.* »

de valeur en un point, les notions de zéro (*Nullstelle*) d'ordre n et de pôle d'ordre n d'une différentielle ont bien un sens. La distinction entre fonctions et différentielles est encore soulignée lorsque Weyl montre que la notion de *résidu* est une notion propre aux différentielles et non aux fonctions : elle est en effet stable par la formule de changement d'uniformisante locale spécifique aux différentielles, elle ne l'est pas par changement d'uniformisante locale dans l'expression d'une fonction. L'édition de 1955 introduira d'autres types d'objets-sur par ce mode de présentation : par exemple les « densités » (*Dichte*) sont des objets se présentant dans un système de coordonnées locales au voisinage d'un point comme une fonction réelle des coordonnées, dont les valeurs sont multipliées, si on change de coordonnées locales, par le déterminant jacobien du changement de coordonnées ; il montre ensuite que le produit extérieur de deux 1-formes différentielles réelles sur la surface sont de ce type [Weyl 1955 64]. Mais en 1955 ce mode de définition d'objets-sur est déjà standard.

Nous voudrions terminer par un dernier mode d'introduction d'objets-sur utilisé dès 1913, la définition par *localisation* d'une notion globale. Ainsi au paragraphe 13 Weyl commence-t-il par introduire la notion globale de « fonction de courbe » (*Kurvenfunktion*) : une telle fonction F associe à toute courbe γ sur la surface F un nombre réel $F(\gamma)$, elle est dite linéaire si de plus, lorsque l'extrémité de γ est l'origine de γ', on a $F(\gamma+\gamma') = F(\gamma)+F(\gamma')$. On retrouve les « fonctions de lignes » de l'analyse fonctionnelle naissante, mais la topologie revient vite au devant de la scène : une fonction linéaire de courbe est dite « homologue à 0 » si elle s'annule sur les courbes fermées, on le note $F\sim 0$. Weyl fait remarquer qu'il existe alors trivialement une fonction « ponctuelle » f sur la surface pour laquelle, si γ est d'origine $\mathbf{p_1}$ et d'extrémité $\mathbf{p_2}$, $F(\gamma) = f(\mathbf{p_2}) - f(\mathbf{p_1})$. Le cas non trivial est explicitement introduit par localisation :

> Nous ne considérons que celles des fonctions linéaires de courbes qui sont partout *im Kleinen* ~ 0 ; on peut les appeler des « **fonctions intégrales** ». A tout point de la surface doit donc être associé un voisinage tel que, pour toute courbe fermée γ_0 de ce voisinage, $F(\gamma_0) = 0$. [Weyl 1913 68][35]

Plus précisément, les fonctions intégrales sont toujours des données globales – comme fonctions sur les courbes sur la surface – mais dont la propriété caractéristique est obtenue en localisant la propriété globale d'homologie à zéro. L'objectif sera bien sûr, dans la partie de l'ouvrage consacrée aux théorèmes d'existence, d'établir la représentation des fonctions

[35] « *Wir betrachten nur solche lineare Kurvenfunktionen, welche « im Kleinen » überall ~0 sind ; diese mögen « **Integralfunktionen** » heißen. Es soll also zu jedem Punkt der Fläche eine Umgebung von der Art geben, daß für jede in dieser Umgebung verlaufende geschlossene Kurve* γ_0 : $F(\gamma_0) = 0$ *ist.* »

intégrales sur les surfaces de Riemann par les différentielles harmoniques. Pour l'heure, ce sont les aspects algébriques de ces objets qui sont utilisés, à savoir leur stabilité par combinaison linéaire réelle et la compatibilité de la relation d'homologie avec ce que nous nommerions la structure d'espace vectoriel réel de l'ensemble des fonctions intégrales. L'ordre de connexion (*Zusammenhangsgrad* [Weyl 1913 68]) d'une surface est défini comme le nombre maximal de fonctions intégrales linéairement indépendantes (sur **R**), à homologie près. Par dualité, bien que le terme ne soit par encore utilisé, pas plus que celui d'espace vectoriel, Weyl définit ensuite l'homologie des chemins – deux chemins sont homologues si et seulement si ils ont même image par toute fonction intégrale de la surface – et considère d'espace vectoriel réel des classes d'homologies de chemins. Cette élégante introduction abstraite permet, entre autres avantages, d'éviter les considérations incertaines présidant aux tentatives d'introduction géométrique des combinaisons linéaires de chemins à coefficients *réels*.

On voit ici l'alliance entre le style très formel des définitions, privilégiant les propriétés caractéristiques abstraites aux dépens des modes de représentation ou des procédés de construction, et la rigueur d'une théorie qui souhaite accéder au rang de fondement et non d'illustration intuitive mais remplie d'entités suspectes. Depuis Riemann, la définition de l'ordre de connexion d'une surface – qui avait d'ailleurs évolué entre 1851et 1857 – avait été sans cesse critiquée et reformulée face aux critiques. Weyl suit ici la voie ouverte par Poincaré dans son *Analysis situs* de 1895 en optant pour une formulation algébrique et en distinguant clairement les aspects homologiques des aspects homotopiques. La définition d'objets-sur tels les fonctions intégrales ou les différentielles – par delà la différence des modes d'introduction – partage certains des traits fondamentaux des définitions axiomatiques des surfaces topologiques et analytiques : on ne sait guère à quoi ces objets ressemblent, ni même souvent si de tels objets existent, mais leur définition ne contient aucune zone d'ombre et peut donc fournir le point de départ d'un développement strictement rigoureux ; les objets ne sont pas définis de la manière dont ils se présentent de prime abord – une équation algébrique, l'intégrale d'une fonction rationnelle de deux variables liées par une équation algébrique – mais par un lien abstrait avec d'autres entités, par la propriété relationnelle caractéristique qui sera amenée à jouer le rôle fondamental dans l'économie de la démonstration. La théorie est bien moins l'exposé d'une lutte avec un problème ou une situation complexe qui résiste à chaque étape, que le déroulement le plus lisse possible des virtualités contenues dans les prémisses axiomatiques. Mode d'exposition plus que mode d'exploration, il ne peut apparemment s'agir là que d'un type de présentation *tardif* dans l'histoire du développement d'une théorie. C'est bien cette conception que l'on retrouve sous la plume de Weyl quelques années plus tard (1932) dans un passage célèbre :

> En effet, tous ces beaux concepts généraux ne tombent pas tous seuls entre les mains des Hommes. Ce sont au contraire certains problèmes concrets, dans leur complexité indivise, qui ont été d'abord vaincus par certains, pour ainsi dire par la force brute. Ce n'est qu'ensuite que viennent les axiomaticiens [*die Axiomatiker*] qui constatent : au lieu d'enfoncer la porte de toute vos forces en vous blessant les mains jusqu'au sang, on aurait dû forger de telle et telle manière une clé bien ouvragée, avec laquelle la porte s'ouvre tout en douceur, comme par elle-même. Mais s'ils peuvent forger de telles clés, c'est parce que, après qu'on ait réussi à la forcer, la serrure a été étudiée par devant et par derrière, de l'intérieur et de l'extérieur. Avant qu'on puisse généraliser, formaliser et axiomatiser, il faut que la substance mathématique soit là. [Weyl 1932 357][36]

Nous aurons à revenir sur ce point dans les chapitres suivants à propos de la reprise et de la généralisation des techniques weyliennes dans la mise en place des notions de variété, de variété fibrée et de faisceaux, pour voir si cette démarche structurale n'est pas devenue dans les années 40 un mode d'exploration.

2. Les revêtements.

Après les modes de donations locaux et intrinsèques d'objets-sur, abordons les différentes formes de démonstrations de propriétés globales. On trouve la forme la plus classique pour la propriété : sur une surface fermée, la somme des résidus d'une différentielle méromorphe est nulle [Weyl 1913 67] ; appliqué à la dérivée logarithmique d'une fonction méromorphe, on en déduit qu'une telle fonction prend chaque valeur (y compris ∞) le même nombre de fois (compté avec multiplicité) [Weyl 1913 119]. Le procédé est bien connu : la surface est décomposée au moyen d'une triangulation pour laquelle chaque triangle contient au plus un pôle, l'annulation de la somme des intégrales curvilignes le long des triangles est une simple

[36] « *Es ist nähmlich so, daβ alle die schönen allgemeinen Begriffe nicht von selber den Menschen in die Hände fallen. Sondern zuerst sind bestimmte konkrete Probleme, in ihrer unzerlegten Komplexität, sozusagen durch brutale Gewalt von Einzelnen bezwungen worden. Erst nachher kommen die Axiomatiker und stellen fest : Statt die Tür mit aller Anspannung der Kräfte einzudrücken und sich die Hände blutig zu reiβen, hätte man sich einen so und so beschaffenen kuntsvollen Schlüssel konstruiren sollen, und mit ihm wäre die Türe ganz leise wie von selber zu öffnen gewesen. Aber den Schlüssel können sie doch erst konstruiren, weil sie nach gelungenem Durchbruch dem Schloβ von hinten und vorn, von auβen und innen studieren können. Bevor man generalisieren, formalisieren und axiomatisieren kann, muβ eine mathematische Substanz da sein.* »

conséquence de l'orientabilité des surfaces de Riemann, au sens où l'on peut orienter chacun des triangles de sorte que les orientations induites sur chaque segment par les deux triangles qui s'y rencontrent soient de sens contraire. Le travail sur l'orientation n'est toutefois pas uniquement combinatoire, même si c'est sous cette forme qu'elle est utilisée. Weyl commence par montrer, par transport de structure, qu'il existe une notion bien définie d'orientation en un point de la surface topologique (i.e. avant toute structure différentiable), puis une notion de continuité du choix de l'orientation ; il montre ensuite que l'existence d'une structure analytique complexe sur une surface de Riemann implique son orientabilité, puis que sa notion d'orientabilité coïncide avec la notion combinatoire. Bien qu'il n'en ait pas l'usage, il définit le revêtement d'orientation d'une surface non orientable.

Un deuxième mode de démonstration de résultats globaux repose sur la notion de simple connexité. Si les résultats sont classiques, la présentation de Weyl ne l'est pas : il décide de fonder la notion de simple connexité sur celle de revêtement. Cette notion fondamentale est mise en place en plusieurs étapes au paragraphe 9. Tout d'abord :

> Soit F une surface donnée, la « **surface de base** » [*Grundfläche*], nous dirons qu'une surface $\overline{F}$ est un **revêtement** [*Überlagerungfläche*] de F lorsqu'à chaque point $\overline{p}$ de $\overline{F}$ est associé un unique point p de F, la « **trace** » [*Spur*] de $\overline{p}$; on dit aussi que $\overline{p}$ est **au-dessus** de p. [Weyl 1913 47][37]

Ici « surface » est à entendre au sens de l'*Analysis situs* et c'est une simple notion ensembliste d'application qui est définie. Il est toutefois mis en place un vocabulaire spécifique : « application » (*Abbildung*), pourtant utilisé plus haut par Weyl, est ici remplacé par « association » (*Zuordnung*), « point image » (*Bildpunkt*) par « trace ». Des propriétés plus précises sont ensuite mises en place :

> Nous dirons que $\overline{F}$ est non-ramifiée [*unverzweigt*] (par rapport à F) chaque fois que cette association satisfait à la condition suivante : soit $\overline{p_0}$ un point quelconque de $\overline{F}$, il existe toujours un voisinage de $\overline{p_0}$ sur $\overline{F}$ corrélé par cette association de manière

[37] « *Ist F eine gegebene Fläche, die « **Grundfläche** », so wollen wir die Fläche $\overline{F}$ eine **Überlagerungsfläche** über F nennen, wenn jedem Punkt $\overline{p}$ auf $\overline{F}$ ein einziger Punkt p auf F als « **Spurpunkt** » von $\overline{p}$ zugeordnet ist ; wir sagen dann auch, $\overline{p}$ **liegt über** p.* »

> *inversiblement univoque et inversiblement ouverte* à un domaine de F. [Weyl 1913 47][38]

Weyl montre ensuite que, sous cette hypothèse, le relèvement des chemins continus n'existe peut-être pas toujours, mais que, s'il existe, il est unique une fois que son origine est choisie parmi les points au-dessus de l'origine du chemin primitif. En ajoutant la condition d'existence on passe des revêtement non ramifiés aux revêtements non ramifiés non limités (*unbegrenzt*) **[p.47]**. Par commodité ce sont ces objets que nous désignerons dans notre texte par « revêtement ». Un revêtement est dit à un seul feuillet si un unique point se trouve au dessus de chaque point de F.

> Si une surface F ne possède d'autres revêtements illimités non-ramifiés que des revêtements à un seul feuillet, elle est dite **simplement connexe**. [Weyl 1913 47][39]

On retrouve un trait de l'exposé de Weyl déjà noté plus haut : il choisit pour des notions classiques (fonction harmonique, ordre de connexion, simple connexité) des définitions qui sont en rupture avec l'usage, souvent aux dépens d'un contenu géométrique intuitif. Cela lui permet entre autres de mieux distinguer les aspects homotopiques et homologiques, mais cela répond aussi à un souci plus général de profilage rétroactif de la théorie : après soixante ans de théorie géométrique des fonctions d'une variable complexe, Weyl définit les notions non par leur contenu intuitif (qui n'est d'ailleurs pas nécessairement en défaut de rigueur) mais par la propriété caractéristique qui est utilisée plus tard dans les démonstrations. Il l'écrit ici explicitement en note de bas de page, conscient de devoir justifier son choix de définition de la simple connexité :

> Cette définition met en avant celle des propriétés des surfaces simplement connexes qui est décisive pour les applications en théorie des fonctions. [Weyl 1913 47] [40]

De ces applications, Weyl en donne rapidement deux. Tout d'abord le « théorème de monodromie » : si en un point d'un domaine simplement connexe d'une surface de Riemann on se donne $z = a_{-m}\, t^{-m} + \ldots + a_{-1}\, t^{-1} + a_0 + a_1\, t + \ldots$ (t une uniformisante locale), et si le prolongement analytique de cet élément de fonction méromorphe ne rencontre dans cette partie d'autre singularité que des pôles, alors ce prolongement analytique est univoque et

---

[38] « *Diese Zuordnung soll, jedenfalls dann, wenn wir als (relativ zu F)* ***unverzweigt*** *bezeichen, die folgende Bedingung erfüllen : Ist* $\overline{p_0}$ *ein beliebiger Punkt von* $\overline{F}$ *, so gibt es stets eine Umgebung von* $\overline{p_0}$ *auf* $\overline{F}$*, welche durch jene Zuordnung* umkehrbar eindeutig und umkehrbar gebietstetig *auf ein gebiet von F gezogen ist.* »

[39] « *Gehören zu einer Fläche F keine andern unverzweigten unbegrenzten Überlagerungsflächen als nur einblättrige, so heißt F* ***einfach zusammenhängend****.* » Weyl a bien entendu fait des hypothèses de connexité.

[40] « *Diese Definition hebt diejenige Eigenschaft der einfach zusammenhängenden Flächen hervor, welche für die funktionentheoretischen Anwendungen die entscheidende ist.* »

détermine donc une fonction méromorphe dans le domaine [Weyl 1913 54]. Quelques lignes plus loin le « théorème intégral de Cauchy » : s'il est clair que la différentielle d'une fonction méromorphe est sans résidu, la réciproque est vraie dans un domaine simplement connexe, i.e. toute différentielle méromorphe sans résidu y dérive d'une fonction méromorphe [Weyl 1913 56].

Une autre manière d'utiliser la simple connexité est d'introduire le revêtement universel (*universelle Überlagerungsfläche* [Weyl 1913 50]) d'une surface, idée que Weyl rapporte à Poincaré dans son article de 1883 *Sur un théorème de la théorie générale des fonctions*. Ce revêtement est caractérisé informellement comme le revêtement « le plus fort », plus précisément : un chemin de trace fermée n'y est fermé que s'il l'est dans tout autre revêtement de la même surface de base. La démonstration d'existence du revêtement universel $\widetilde{F}$ fournit à Weyl l'occasion de montrer comment, dans un cas non trivial, la caractérisation axiomatique des surfaces topologiques permet de se donner de tels objets : F étant une surface donnée et $\mathbf{p_0}$ un point de F, les « points » de $\widetilde{F}$ sont des classes d'équivalences de chemins de F d'origine $\mathbf{p_0}$, pour la relation d'équivalence « deux chemins sont équivalents si dans tout revêtement, leurs relèvements de même origine ont même extrémité »[41] ; on appréciera le caractère peu constructif de cette donation des points qui, par contre, est la simple mise en forme de l'idée informelle de dépliement maximal. Weyl définit ensuite la notion de « voisinage » d'un point dans cet ensemble abstrait de la manière qu'on imagine.

L'intérêt de la notion de revêtement n'est bien entendu pas limité à la caractérisation de la simple connexité, et le revêtement universel n'est pas le seul à jouer un rôle fondamental. Pour établir des théorèmes globaux, Weyl reprend la *stratégie* fondamentale de la tradition géométrique qui consiste à associer à chaque type de fonction un domaine « naturel » sur lequel leur existence est garantie ou leurs propriétés plus simples à étudier. La *tactique* de Weyl est simplement plus cohérente dans son développement guidé par les définitions axiomatiques des domaines, et distingue mieux certains aspects mêlés dans les présentations antérieures. Un premier exemple découle de ce qui vient d'être dit à propos des domaines simplement connexes : toute situation de prolongement analytique le long de chemins définit, lorsque le prolongement existe, une fonction méromorphe sur le revêtement universel. Cette remarque fondamentale est bien sûr précédée d'une remarque donnant un sens à la notion de fonction régulière sur le revêtement universel : de même que tout revêtement d'une surface de Riemann, il est muni naturellement d'une structure de surface de Riemann, il suffit de

[41] Il s'agit ici de notre reformulation, pas des termes de Weyl.

considérer comme uniformisantes en un point du revêtement les uniformisantes en son point-trace. Ici encore, la définition locale de la structure analytique par le faisceau des fonctions régulières permet un transport de structure rapide, et un transport global, d'ailleurs sans bijection. Il reste à caractériser, parmi les fonctions (sous-entendu : méromorphes) sur le revêtement universel, celles qui proviennent de fonctions sur la surface de base. Weyl définit la notion purement topologique de revêtement régulier [42] – tous les relèvements d'une courbe fermée sont fermés si un l'est – et en déduit qu'on peut dans cette situation associer aux chemins fermés de l'espace de base des homéomorphismes du revêtement qui échangent les points au-dessus d'une même trace. Ces automorphismes du revêtement (Weyl parle de *Decktransformationen* [Weyl 1913 50]) forment un groupe pour lequel la donnée de deux points de même trace détermine un et un seul élément [43]. Weyl ne fait pas allusion au « groupe fondamental » de Poincaré, et ne combine à aucun moment des classes d'homotopie de chemins. Il insiste par contre sur le fait que ce groupe est un invariant topologique du revêtement. Si l'on revient au revêtement universel, nécessairement régulier, ces notions permettent de répondre à notre question : les fonctions sur le revêtement universel induites par les fonctions sur l'espace de base sont celles invariantes sous l'action du groupe associé [Weyl 1913 54]. Le revêtement universel est de nouveau utilisé à la fin de l'ouvrage, dans l'esprit qui était celui de Poincaré en 1883, à propos de l'uniformisation puis de l'étude des automorphismes d'une surface de Riemann. A côté du revêtement universel, lié aux problèmes d'univocité de prolongements analytiques, Weyl introduit un autre revêtement, lié aux problèmes d'univocité des fonctions définies comme intégrales de formes différentielles. On se souvient qu'il avait abordé la question indirectement en définissant une notion abstraite de « fonction intégrale », possédant une propriété de locale trivialité formulable de deux manières équivalentes : elle s'annule localement sur les courbes fermées ; elle dérive localement d'une fonction ponctuelle sur la surface. Par dualité était définie la notion de courbe homologue à zéro, qui donne l'occasion d'introduire un nouveau revêtement :

> Au dessus de la surface fermée F d'ordre de connexion h il existe un revêtement régulier, illimité et non-ramifié $\hat{F}$ sur lequel une courbe de trace fermée dans F n'est fermée que si cette trace est ~ 0. Toutes les fonctions intégrales sur F deviennent homologues à zéro si on les regarde comme des fonctions intégrales sur $\hat{F}$; c'est

[42] Dans l'édition de 1955 Weyl remplace « régulier » par « normal ».
[43] En 1955, le groupe des *Deckbewegungen* est appelé « groupe de Galois » du revêtement normal.

pourquoi je nomme $\hat{F}$ le revêtement des fonctions intégrales (*die Überlagerungsfläche der Integralfunktionen*). [Weyl 1913 74][44]

Cette seule phrase définit l'objet, les vérifications de détail sont laissées au lecteur. Par construction, le groupe des automorphismes de ce revêtement est isomorphe au groupe d'homologie des chemins fermés sur F, un groupe abélien donc. C'est ce revêtement des fonctions intégrales [45] – la théorie homologique et non homotopique de la variété, donc – qui joue le rôle fondamental dans les paragraphes 16 et 17 où – après que le principe de Dirichlet démontré *à la* Hilbert a permis d'établir l'existence des différentielles abéliennes – sont étudiées les intégrales abéliennes. En particulier, les théorèmes de Riemann-Roch et d'Abel sont explicitement présentés comme des théorèmes de *descente* – bien sûr ce terme n'y est pas – où l'on cherche à caractériser des espaces de fonctions sur F à partir de fonctions dont le lieu naturel est $\hat{F}$ [Weyl 1913 119]. La démonstration du théorème d'Abel donne d'ailleurs lieu à l'introduction d'une nouvelle variété, qui n'est d'ailleurs pas une surface : il est établi au paragraphe 16 que chaque point de F détermine un caractère du groupe des *Decktransformationen* de $\hat{F}$; cette formulation intrinsèque remplace l'association classique à un point de la valeur qu'y prennent les intégrales, depuis un point arbitraire fixé, des *p* différentielles abéliennes de première espèce. Ces caractères peuvent être considérés comme les « points » d'une variété de dimension réelle 2*p* dont l'allure est décrite sommairement et qui ne reçoit pas de nom spécifique [Weyl 1913 114].

---

[44] « *Über der geschlossenen Fläche F vom Zusammenhangsgrad h gibt es eine unverzweigte unbegrenzte (reguläre) Überlagerungsfläche* $\hat{F}$ *, auf der eine Kurve, deren Spurkurve auf F geschlossen ist, sich dann und nur dann schließt, falls jene Spurkurve ~ 0 ist. Alle Integralfunktionen auf F werden, wenn man sie als Integralfunktionen auf* $\hat{F}$ *betrachtet, der 0 homolog ; daher nenne ich* $\hat{F}$ *die* ***Überlagerungsfläche der Integralfunktionen***. »

[45] En 1955, le terme de « revêtement de classes » est préféré, explicitement par analogie avec le corps de classes en théorie des corps de nombres algébriques.